

Задачи «красного» уровня сложности MathCat

1. История сохранила нам мало черт биографии замечательного древнего математика Диофанта. Всё, что известно о нём, почерпнуто из надписи на его гробницы – надписи, составленной в форме математической задачи. Мы приведём эту надпись:
Путник! Здесь прах погребён Диофанта. И числа поведают
Могут, о чудо, сколь долог был век его жизни.
Часть шестую его представляло прекрасное детство.
Двенадцатая часть протекла ещё жизни – покрылся
Пухом тогда подбородок.
Седьмую в бездетном браке провёл Диофант.
Прошло пятилетие; он
Был ошастливлен рождением прекрасного первенца сына,
Коему рок половину лишь жизни прекрасной и светлой
Дал на земле по сравненью с отцом.
И в печали глубокой
Старец земного удела конец воспринял, переживши
Года четыре с тех пор, как сына лишился.
Скажи, сколько лет жизни достигнув,
Смерть воспринял Диофант?
(3 балла)
2. У четырёх братьев 45 рублей. Если деньги первого увеличить на 2 рубля, деньги второго уменьшить на 2 рубля, деньги третьего увеличить вдвое, а деньги четвертого уменьшить вдвое, то у всех окажется поровну. Сколько было у каждого? **(6 баллов)**
3. Артели косцов надо было скосить два луга, один вдвое больше другого. Половину дня артель косила большой луг. После этого артель разделилась пополам и докосила его к вечеру до конца; вторая же половина косила малый луг, на котором к вечеру ещё остался участок, скошенный на другой день одним косцом за один день работы. Сколько косцов было в артели? **(10 баллов)**
4. $8*8=54$. Чему в этом случае будет равно число 84? **(6 баллов)**
5. Однажды в парикмахерской подошёл ко мне мастер с неожиданной просьбой:
- Не можете ли нам разрешить задачу, с которой мы никак не справимся?
- Уж сколько раствора испортили из-за этого! – добавил другой.
- В чём задача? – осведомился я.
- У нас имеется два раствора перекиси водорода: 30%-ный и 3%-ный. Нужно их смешать так, чтобы составилась 12%-ный раствор. Не можем подыскать правильной пропорции.
Мне дали бумажку, и требуемая пропорция была найдена. Она оказалась очень простой. Какой именно? **(4 балла)**
6. Разведчик получил приказ произвести разведку впереди эскадры по направлению её движения. Через 3 часа это судно должно вернуться к эскадре. Спустя сколько времени после оставления эскадры разведывательное судно должно повернуть назад, если скорость его 60 узлов, а скорость эскадры 40 узлов? **(5 баллов)**
7. Автомобиль проехал расстояние между двумя городами со скоростью 60 километров в час и возвратился со скоростью 40 километров в час. Какова была средняя скорость его езды? **(4 балла)**
8. Прогуливаясь по городу, трое студентов-математиков заметили, что водитель автомашины грубо нарушил правила уличного движения. Номер машины (четырёхзначный) ни один из студентов не запомнил, но, так как они были математиками, каждый из них заметил некоторую особенность этого четырёхзначного числа. Один из студентов вспомнил, что две первые цифры числа были одинаковы. Второй вспомнил, что две последние цифры также совпадали между собой. Наконец, третий утверждал, что всё это четырёхзначное число является точным квадратом. Можно ли по этим данным узнать номер машины? **(6 баллов)**

9. У одного арабского математика 11 века находим следующую задачу:
 На обоих берегах реки растёт по пальме, одна против другой. Высота одной – 30 локтей, а другой – 20 локтей; расстояние между их основаниями – 50 локтей. На верхушке каждой пальмы сидит птица. Внезапно обе птицы заметили рыбу, выплывшую к поверхности воды между пальмами; они кинулись к ней разом и достигли её одновременно.
 На каком расстоянии от основания более высокой пальмы появилась рыба? **(6 баллов)**
10. Требуется на один рубль купить 40 штук почтовых марок – копеечных, четырёхкопеечных и двенадцатикопеечных. Сколько окажется марок каждого достоинства? **(8 баллов)**
11. Стороны прямоугольника выражаются целыми числами. Какой длины должны они быть, чтобы периметр прямоугольника численно равнялся его площади? **(7 баллов)**

12.

$$4 - 10 = 9 - 15$$

$$4 - 10 + 6\frac{1}{4} = 9 - 15 + 6\frac{1}{4}$$

$$2^2 - 2 * 2 * \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 * 3 * \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2$$

$$2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$$

$$2 = 3$$

В чём же кроется ошибка? **(9 баллов)**

13. На две партии разбившись,
 Забавлялись обезьяны.
 Часть восьмая их в квадрате
 В роще весело резвилась;
 Криком радостным двенадцать
 Воздух свежий оглашали.
 Вместе сколько, ты мне скажешь,
 Обезьян там было в роще?
(1 балл)
14. Найти три последовательных числа, отличающихся тем свойством, что квадрат среднего на один больше произведения двух остальных. **(3 балла)**
15. Над озером тихим,
 С полфута размером, высился лотоса цвет.
 Он рос одиноко. И ветер порывом
 Отнёс его в сторону. Нет
 Боле цветка над водой,
 Нашёл же рыбак его ранней весной
 В двух футах от места, где рос.
 Итак, предложу я вопрос:
 Как озера вода
 Здесь глубока?
(5 баллов)
16. На берегу находится маяк, верхушка которого возвышается на 40 метров над поверхностью воды. С какого расстояния откроется этот маяк для корабля, если матрос-наблюдатель («марсовой») находится на «марсе» корабля на высоте 10 метров над водной поверхностью? (Радиус Земли $R = 6400$ км.) **(5 баллов)**
17. В витрине табачного треста выставлена огромная папироса, в 15 раз длиннее и в 15 раз толще обыкновенной. Если на набивку одной папиросы нормальных размеров нужно 0,5 грамма табаку, то сколько табаку понадобилось, чтобы набить исполинскую папиросу в витрине? **(4 балла)**
18. Какую форму нужно придать треугольнику, чтобы при данной сумме его сторон он имел наибольшую площадь? **(8 баллов)**