Ответы и решения «красного» уровня сложности MathCat.ONLINE

Задача 1. (5 баллов) Упростите выражение: $\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}$.

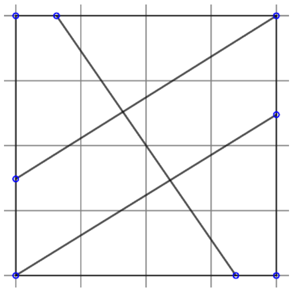
Ответ: 1.

Решение: $\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{2}-\sqrt{1}=2-1=1$.

Задача 2. (6 баллов) Внутри клетчатого квадрата со стороной 4 клетки провели несколько отрезков так, что каждая клетка оказалась пересечена хотя бы одним из них. Какое наименьшее число отрезков могло быть проведено?

Ответ: 3.

Решение: Сначала объясним, почему двух отрезков не хватит. Один отрезок может пересечь не более 7 клеток, потому что каждая новая клетка означает пересечение отрезка либо с горизонтальной, либо с вертикальной линией, а их внутри квадрата всего 3 + 3 = 6. Следовательно, два отрезка пересекают не более 14 клеток из 16. Пример для трёх отрезков – на рисунке.



Задача 3. (7 баллов) На доске написано десять чисел: 15, 16, 19, 27, 28, 30, 36, 40, 45, 47. Учительница загадала одно из них, а затем шепнула на ушко отличнику Пете первую цифру загаданного числа, а отличнице Маше – его вторую цифру. После этого между ребятами состоялся такой диалог.

Петя: «Я не знаю, что это за число. Но и ты, Маша, тоже точно не знаешь».

Маша: «Сначала я и правда не знала, но теперь уже знаю».

Петя: «А, ну теперь и я его знаю!»

Так что же за число загадала учительница?

Ответ: 36.

Решение: Учительница не могла назвать Пете цифру 1 или 2, иначе нельзя было бы исключать варианты, что она загадала 19 или 28, однако других чисел с такой второй цифрой нет, поэтому Петя не мог бы утверждать, что Маша не знает загаданное число. Маша, поняв, что первая цифра числа равна 3 или 4, догадалась, что это за число, поэтому ей учительница назвала не ноль, иначе оставалось бы два варианта: 30 или 40. Так как Петя после этого тоже догадался, какое число загадала учительница, то для него остался ровно один вариант, начинающийся на его цифру, то есть это могло быть только число 36.

Задача 4. (9 баллов) С левого конца прямой беговой дорожки одновременно стартовали заяц и волк, а с правого им навстречу – лиса. Каждый бежит со своей постоянной скоростью. В момент встречи волка и лисы заяц ещё не добежал до правого конца дорожки и был точно посередине между ним и местом встречи волка и лисы. Добежав до конца, заяц мгновенно развернулся и побежал назад. В момент его встречи с волком лиса ещё не добежала до левого конца и была точно посередине между ним и местом встречи зайца и волка.

Во сколько раз заяц быстрее волка?

Ответ: в $\frac{4}{3}$ раза.

Решение: В момент второй встречи лиса пробежала дорожку без некоторой части, а заяц – удвоенную длину дорожки без двух таких же частей. Следовательно, скорость зайца вдвое больше скорости лисы. В момент первой встречи заяц делил на две равные части отрезок между местом встречи и правым концом дорожки. Лиса пробежала две части, - значит, заяц пробежал четыре части. Тогда волк пробежал три части, поэтому его скорость в $\frac{4}{3}$ раза меньше скорости зайца.

Задача 5. (9 баллов) Три честных пирата выкопали восемь золотых монет номиналами 1 пиастр, 2 пиастра, …, 8 пиастров. Сколькими способами пираты могут разделить их между собой, чтобы всем досталось поровну денег?

Ответ: 18.

Решение: Всего у пиратов 1 + 2 + … + 8 = 36 пиастров, поэтому каждому должно достаться по 36:3 = 12 пиастров. Значит, монеты номиналом 7 и 8 пиастров достанутся разным пиратам. Выпишем все возможные группы, содержащие монеты в 7 и 8 пиастров и дающие суммы 12: (7, 5), (7, 4, 1), (7, 3, 2), (8, 4), (8, 3, 1). Видим, что одновременно можно образовать только такие пары групп: (7, 5) и (8, 4), (7, 5) и (8, 3, 1), (7, 3, 2) и (8, 4) – всего три варианта. Первую группу из каждой пары можно отдать любому из трёх пиратов, вторую – любому из двух остальных, а третья автоматически достаётся оставшемуся. Поэтому всего есть $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ вариантов разделить монеты между пиратами.

Задача 6. (10 баллов) В однокруговом хоккейном турнире участвовали 10 команд. Победа приносит команде 2 очка, ничья – 1, поражение – 0. Одна из команд одержала больше побед, забросила больше и пропустила меньше шайб, чем любая другая команда. Какое самое низкое место она могла занять?
Ответ: 10.
Решение: Пусть команда *X* одержала две победы над командами *A* и *B* со счётом 5:0, остальным семи командам проиграла со счётом 0:1, а все команды, кроме *X*, сыграли друг с другом вничью 1:1. Тогда *X* забросила 10 шайб, а пропустила 7. Команды *A* и *B* забросили по 8 шайб, а пропустили по 13. Все остальные команды забросили по 9 шайб, а пропустили по 8. Таким образом, *X* одержала больше всех побед, забросила больше всех шайб и пропустила меньше всех. При этом у *X* всего 4 очка, у команд *A* и *B* – по 8 очков, а у остальных – по 10 очков, то есть *X* заняла последнее место.

Задача 7. (12 баллов) Урожай на поле убирали несколько одинаковых комбайнов, которые, начни они вместе, справились бы с работой за 24 часа. К сожалению, по техническим причинам они начинали работать только через равные промежутки времени, но каждый работал до самого конца. Первый работал в 5 раз дольше последнего. Сколько часов работал первый комбайн?
Ответ: 40.
Решение: По условию среднее арифметическое времени работы комбайнов равно 24 часам, а так как эти времена образуют арифметическую прогрессию, то сумма времени работы первого и последнего равна 48 часам. Значит, первый комбайн работал $48 \cdot \frac{5}{6} = 40$ часов.

Задача 8. (13 баллов) В закрытом ящике лежат носки трёх цветов – 8 чёрных, 7 синих и 5 белых. Вася хочет достать не глядя как можно большее число носков, но так, чтобы в ящике обязательно остались хотя бы 6 носков одного цвета, 5 носков другого и 2 носка третьего цвета. Сколько носков он может вытащить?
Ответ: 3.
Решение: Вася «проиграет», если в ящике останутся комбинации 5 + 5 + 5, 8 + 4 + 4 или 8 + 7 + 1 (в первой нет шести носков никакого цвета, во второй нет пяти носков второго цвета, в третьей нет двух носков для третьего цвета). То есть 4 носка он вытащить не сможет, так как ими могут оказаться 4 белых (или 1 белый и 3 синих). Три носка вытащить можно всегда, так как это не приводит ни к одному из неудачных для Васи результатов.

Задача 9. (14 баллов) У каждого из двух 400-значных чисел *a* и *b* сумма цифр равна 2024. Какова наибольшая возможная сумма цифр числа *a* + *b*?
Ответ: 3598.
Решение: Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа *n*. Будем складывать числа *a* и *b* в столбик, тогда $S(a + b) = S(a) + S(b) - 9k$, где *k* – количество переходов через десяток (каждый переход уменьшает сумму цифр в текущем разряде на 10, но увеличивает в следующем на 1). В тех разрядах, где нет перехода через десяток, сумма цифр не больше 9, в остальных разрядах она не больше 18. Следовательно,
$9(400 - k) + 18k \geq 2024 \cdot 2 \Leftrightarrow 9k \geq 448 \Leftrightarrow k \geq 50$, откуда $S(a + b) \leq 2024 \cdot 2 - 9 \cdot 50 = 3598$.
Если $a = 4545\ldots454499\ldots9$, $b = 5454\ldots544499\ldots9$, где в числе *a* кусок «45» повторяется 174 раза, в числе *b* столько же раз кусок «54» и на конце каждого числа 50 девяток, то при сложении переход через десяток будет только в 50 младших разрядах.

Задача 10. (15 баллов) В треугольнике *ABC* на рисунке 1 углы *A* и *C* равны 20° и 40° соответственно. На продолжении стороны *CB* за точку *B* отмечена такая точка *D*, что $BD = AC - AB$. Найдите угол *ADC*.
Ответ: 100°.
Решение: Отметим на стороне *AC* такую точку *E*, что $AE = AB$. Тогда $EC = AC - AE = AC - AB = BD$, а треугольник *BAE* равнобедренный с углом 20° при вершине, поэтому $\angle ABE = \angle AEB = (180° - 20°):2 = 80°$. При этом угол *AEB* является внешним к треугольнику *BEC*, значит, $\angle EBC = \angle AEB - \angle ECB = 80° - 40° = 40°$, то есть треугольник *BEC* тоже равнобедренный.

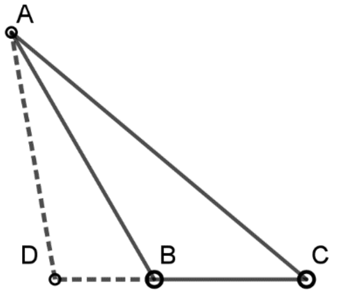


Рисунок 1

Таким образом, $BD = EC = EB$, поэтому треугольник *DBE* равнобедренный с углом $180° - 40° = 140°$ при вершине *B* и $\angle BDE = (180° - 140°):2 = 20° = \angle BAE$. Следовательно, четырёхугольник ADBE можно вписать в окружность, и $\angle ADC = 180° - \angle AEB = 180° - 80° = 100°$.