Ответы и решения «жёлтого» уровня сложности MathCat.ONLINE

Задача 1. (5 баллов) У Коли в левом кармане лежат монеты по 2 рубля, а в правом – по 5 рублей. Известно, что в одном из карманов у Коли в 3 раза больше денег, чем в другом. Какая минимальная сумма денег может быть у Коли в двух карманах?
Ответ: 40.
Решение: В кармане с большей суммой она кратна 2, 3 и 5, то есть там не менее 30 рублей. Поэтому в другом кармане не менее 10, а всего – не менее 40 рублей. Пример для 40 рублей: в левом кармане пять монет, в правом – шесть.

Задача 2. (6 баллов) Внутри клетчатого квадрата со стороной 3 клетки провели несколько отрезков так, что каждая клетка оказалась пересечена хотя бы одним из них. Какое наименьшее число отрезков могло быть проведено?
Ответ: 2.
Решение: Один отрезок может пересечь пять клеток – например, если его провести из угла в точку, близкую к противоположному углу. Если теперь повернуть отрезок на прямой угол вокруг центра квадрата, то этот второй отрезок пересечёт все остальные клетки.

Задача 3. (7 баллов) Решите уравнение $||x| - 1| + ||x| + 2| = 3$. Ответ запишите в виде числового промежутка $[a, b]$.
Ответ: $[-1, 1]$.
Решение: Про модули полезно думать геометрически – как о расстоянии между точками числовой оси. Здесь $|x|$ – какое-то неотрицательное число. Условие утверждает, что сумма расстояний от него до точки -2 и до точки 1 равна 3. Это означает, что $|x|$ должно лежать на отрезке от -2 до 1. Так как $|x|$ неотрицателен, то он лежит на отрезке $[0, 1]$, а значит, x лежит на отрезке $[-1, 1]$.

Задача 4. (8 баллов) С левого конца прямой беговой дорожки одновременно стартовали заяц и волк, а с правого им навстречу – лиса. Каждый бежит со своей постоянной скоростью. В момент встречи волка и лисы заяц как раз добежал до правого конца дорожки. Там он мгновенно развернулся и побежал назад. Когда он встретился с волком, лиса как раз добежала до левого конца. Во сколько раз заяц быстрее волка?
Ответ: в 3 раза.
Решение: От момента встречи лисы с волком до момента встречи волка с зайцем лиса и волк бежали в разные стороны, то есть разбегались с суммой своих скоростей. Так как заяц пробежал от старта до момента встречи лисы с волком то же расстояние, что и они вместе (длину дорожки), то его скорость тоже равна сумме скоростей лисы и волка. Следовательно, между первой и второй встречами он пробежал ровно такое же расстояние, на которое лиса отбежала от волка. Но вместе эти расстояния как раз составляют длину беговой дорожки, поэтому волк с зайцем встретились посередине. Волк пробежал к этому моменту половину длины дорожки, а заяц – полторы дорожки. Значит, он бежит втрое быстрее.

Задача 5. (9 баллов) Стороны прямоугольника измеряются целым числом сантиметров. Одно из его измерений увеличили на 99 см, а другое – уменьшили на 1 см. При этом получили новый прямоугольник меньшей площади. Какой наименьший периметр мог быть у исходного прямоугольника?
Ответ: 204.
Решение: Пусть стороны прямоугольника были равны a и b. По условию новая площадь $(a + 99)(b - 1)$ меньше прежней площади ab, то есть $99b < 99 + a$. Но так как b не может быть равно 1 (иначе его нельзя уменьшить на 1), то $b \geq 2$, следовательно, $a > 99 \cdot 2 - 99 = 99$, и наименьшее значение a равно 100. Значит, периметр не меньше $2 \cdot (100 + 2) = 204$.

Задача 6. (10 баллов) Чему может быть равно $x + y$, если $x^2 - 2xy = 6x - x^2 - y^2 - 9$?
Ответ: 6.
Решение: Условие эквивалентно $(x - y)^2 + (x - 3)^2 = 0$, откуда $x = y$ и $x = 3$.

Задача 7. (11 баллов) Каждый из 12 человек – рыцарь или лжец. Первый сказал: «Число лжецов среди нас делится на 1», второй: «Число лжецов среди нас делится на 2», …, двенадцатый: «Число лжецов среди нас делится на 12». Сколько среди них может быть рыцарей?

Ответ: 3, 4 или 12.

Решение: Пусть среди них $L > 0$ лжецов и $12 - L$ рыцарей. Тогда правду говорили те и только те, чей номер (и, значит, упомянутый делитель) является делителем числа L. Это значит, что количество делителей L равно $12 - L$. Это свойство выполняется для $L = 9$ (три делителя: 1, 3 и 9) и $L = 8$ (четыре делителя: 1, 2, 4, 8). Отсюда получаем два варианта ответа. Ещё один вариант – 0 лжецов.

Задача 8. (13 баллов) У каждого из двух 400-значных чисел a и b сумма цифр равна 2024. Какова наименьшая возможная сумма цифр числа $a + b$?

Ответ: 448

Решение: Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа n. Будем складывать числа a и b в столбик, тогда $S(a + b) = S(a) + S(b) - 9k$, где k – количество переходов через десяток (каждый переход уменьшает сумму цифр в текущем разряде на 10, но увеличивает в следующем на 1). Так как переходов не может быть больше 400, то $S(a + b) \geq 2024\cdot 2 - 9\cdot 400 = 448$.

Данная сумма цифр достигается, если переход через десяток будет в каждом разряде. Например, это выполняется для чисел $a = b = 55\ldots5999999$, где количество пятёрок равно 395.

Задача 9. (15 баллов) В равнобедренном треугольнике на рисунке 1 ABC ($AB = BC$) проведена биссектриса CD. На прямой AC отмечена точка E так, что угол CDE прямой. Найдите длину отрезка CE, если $AD = 3$.

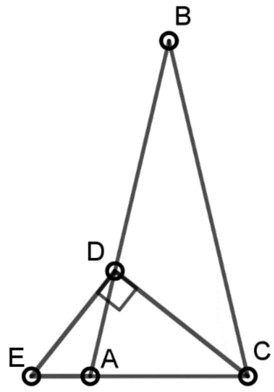

Рисунок 1

Ответ: 6

Решение 1. Пусть прямая ED пересекает прямую BC в точке F. Тогда в треугольнике ECF отрезок CD является биссектрисой и высотой, поэтому этот треугольник равнобедренный, а CD – также его медиана. Отметим точку M – середину стороны CE. Так как MD – средняя линия треугольника ECF, то $MD \parallel CF$. Следовательно, $\angle EMD = \angle ECF = \angle CAB$, откуда треугольник ADM равнобедренный и $MD = AD = 3$, а $CE = CF = 2MD = 6$.

Решение 2. Из прямоугольного треугольника CDE получаем $CE = CD/\cos C$. Из теоремы синусов для треугольника ADC: $CD/\sin A = 3/\sin C$, и так как CD – биссектриса в равнобедренном треугольнике, то $\angle A = 2\angle C$, откуда $CD = 3\sin(2C)/\sin C = 6\cos C$ и $CE = 6\cos C/\cos C = 6$.

Задача 10. (16 баллов) Представьте 9 в виде произведения каких-нибудь трёх рациональных чисел, сумма которых равна 0.

Ответ: $9/2\cdot(-8/2)\cdot(-1/2)$.

Решение: Пусть все три рациональных числа после приведения к общему знаменателю имеют общий знаменатель x. Чтобы произведение дробей было равно 9, его числитель должен быть равен $9x^3$. Если не пытаться раскладывать x на простые множители, то есть всего несколько вариантов такого разложения: $(1, 1, 9x^3)$, $(1, 3, 3x^3)$, $(1, 9, x^3)$, $(1, x, 9x^2)$, $(1, 3x, 3x^2)$, $(1, 9x, x^2)$, $(3, 3, x^3)$, $(3, x, 3x^2)$, $(3, 3x, x^2)$, $(9, x, x^2)$, $(x, x, 9x)$, $(x, 3x, 3x)$. Для отыскания решения можно последовательно перебрать их все (не забывая, что из трёх слагаемых должно быть два отрицательных) и понять, что $(1, 9, x^3)$ даёт решение при $x = 2$.