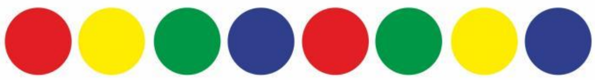
Ответы и решения «зелёного» уровня сложности MathCat.ONLINE

Задача 1. (5 баллов) Сумма 10 последовательных целых чисел равна −5. Чему равно наибольшее из этих чисел?
Ответ: 4.
Решение: Обозначим наибольшее число через n. Тогда сумма будет равна $n + (n - 1) + \ldots + (n - 9) = 10n - 45$, откуда $10n = 40$, $n = 4$.

Задача 2. (6 баллов) Найдите хотя бы одно решение уравнения $1/x + 1/y = 1/2$, если x и y целые, причём $x > y$.
Ответ: (1, −2) или (6, 3).
Решение: Оба числа x и y не могут быть отрицательными, иначе левая часть равенства была бы отрицательной.
Если $x > 0$, а $y < 0$, то $x = 1$, так как при $x \geq 2$ левая часть меньше 1/2. Тогда $y = -2$.
Если же оба числа x и y положительные, то большее из слагаемых в левой части не меньше 1/4. При этом когда оно равно 1/4, то $x = y$, а это не годится. Следовательно, большее из слагаемых хотя бы 1/3, и это даёт второй возможный ответ.

Задача 3. (8 баллов) Про натуральное число A сделано четыре утверждения: «A делится на 5», «A делится на 17», «A делится на 85», «A меньше 20». Известно, что два из этих утверждений истинны, а два – ложны. Чему может быть равно A?
Ответ: 5, 10, 15 или 17.
Решение: По крайней мере одно из первых двух утверждений ложно, иначе было бы истинно и третье. Следовательно, третье утверждение точно ложно. Поэтому истинным должно быть последнее утверждение и одно из первых двух. Отсюда сразу получается ответ.

Задача 4. (8 баллов) В ряд выложено несколько красных, жёлтых, зелёных и синих шариков. Оказалось, что для любой пары различных цветов найдётся пара соседних шариков именно этих цветов. Какое наименьшее число шариков могло быть выложено?
Ответ: 8.
Решение: Всего каждый цвет образует три пары с другими цветами, а у одного шарика не более двух соседей, поэтому шариков каждого цвета не менее двух. Пример из восьми шариков: КЖЗСКЗЖС.



Задача 5. (10 баллов) Наибольший чётный делитель натурального числа на 9 больше наибольшего нечётного. Найдите все такие числа.
Ответ: 12, 18.
Решение: Так как число имеет чётный делитель, то оно само чётное, и его наибольший чётный делитель – это оно само. Соответственно, его наибольший нечётный делитель d – это результат его деления на наибольшую степень двойки, на которую делится само число. Поэтому мы получаем уравнение $2^k \cdot d - d = 9 \Leftrightarrow (2^k - 1)d = 9$, откуда понятно, что d – делитель 9. Перебором получаем, что $d = 9$ и $d = 3$ подходят и дают приведённые выше ответы.

Задача 6. (10 баллов) Есть 10 электронных устройств, соединённых проводами. Из каждого устройства торчит по 25 проводов, а всего проводов 200. Сколько концов проводов болтается в воздухе?
Ответ: 150.
Решение: 200 проводов имеют 400 концов. Из них $25 \cdot 10 = 250$ воткнуты в устройства, следовательно, $400 - 250 = 150$ остались висеть в воздухе.

Задача 7. (11 баллов) На плоскости провели 2024 прямые, среди которых нет параллельных. Какое наибольшее количество углов, равных 10°, могло при этом образоваться?
Ответ: 4046.
Решение: Назовём *пучком* несколько прямых, образующих друг с другом кратные 10° углы. Пучок из 18 прямых даёт 36 углов за счёт того, что «последняя» прямая даст такой же угол с «первой». Пучок из меньшего числа прямых даёт количество углов, хотя бы на два меньшее, чем удвоенное количество прямых в пучке. Так как

мы можем все пучки, кроме одного, делать по 18 прямых, то «недостающие» два угла можно оставить всего в одном пучке, а значит, всего будет $2024 \cdot 2 - 2 = 4046$ таких углов.

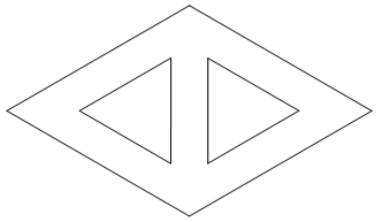


Рисунок 1

Задача 8. (12 баллов) Из ромба на рисунке 1 с углом 60° и периметром 40 вырезали два равносторонних треугольника с периметром 15. Оказалось, что у оставшейся рамки толщина везде одинаковая. Во сколько раз толщина рамки меньше высоты вырезанного треугольника?

Ответ: 2,5.

Решение: Посмотрим на горизонтальную диагональ ромба. Она включает две высоты вырезанных треугольников, одну толщину рамки и два отрезка от вершин ромба до вершин треугольников. Эти отрезки вдвое больше толщины рамки, поскольку sin30° = 1/2. Кроме того, диагональ ромба вдвое больше высоты составляющих его «больших» треугольников со стороной 10, то есть вчетверо больше высоты маленьких треугольников (их стороны равны 5). Мы получили уравнение $2d + h + d + h + 2d = 4h$ (где h – высота вырезанного треугольника, а d – толщина рамки). Из него $5d = 2h \Leftrightarrow h = 2{,}5d$.

Задача 9. (14 баллов) Каждый из семи человек – рыцарь или лжец. Первый сказал: «Число лжецов среди нас делится на 1», второй: «Число лжецов среди нас делится на 2», …, седьмой: «Число лжецов среди нас делится на 7». Сколько среди них может быть рыцарей?

Ответ: 2, 3 или 7.

Решение: Пусть среди них $L > 0$ лжецов и $7 - L$ рыцарей. Тогда правду говорили те и только те, чей номер (и, значит, упомянутый делитель) является делителем числа L. Это значит, что количество делителей L равно $7 - L$. Это свойство выполняется для $L = 4$ (три делителя: 1, 2 и 4) и $L = 5$ (два делителя: 1, 5). Отсюда получаем два варианта ответа. Ещё один вариант – 0 лжецов.

Задача 10. (16 баллов) Все натуральные числа от 1 до 1000 выписаны подряд без пробелов. Сколько раз в получившемся числе встречается группа из трёх или более идущих подряд одинаковых цифр?

Ответ: 20.

Решение: Понятно, что искомая группа не может содержать однозначные числа, а также не может попасть на стык между числами с разным количеством разрядов (на таком стыке встречаются цифры 9 и 1).

Если группа из трёх или более идущих подряд одинаковых цифр есть среди двузначных чисел, то такая группа содержит хотя бы одно число целиком. Значит, это возможно только на стыках следующих пар чисел: (11, 12), (22, 23), …, (88, 89) – всего восемь групп.

Среди трёхзначных есть девять чисел, записываемых одинаковыми цифрами – все они дают по одной группе. Если же искомая группа попала на стык двух каких-то других трёхзначных чисел, то это может быть один из двух вариантов: (aXX, Xbc) или (bcX, XXa), где a, b и c – не обязательно различные цифры, но цифра a не равна X, а также цифры b и c одновременно не равны X. Такое возможно только при $X = 9$, в первом варианте получаем пару (899, 900), во втором – (989, 990).

Единственное четырёхзначное число 1000 даёт ещё одну группу из трёх нулей.

Итого получаем 8 + 9 + 2 + 1 = 20 групп.