Ответы и решения «белого» уровня сложности MathCat.ONLINE

Задача 1. (5 баллов) При делении числа 20 на некоторое натуральное число n получаются частное и остаток. Известно, что остаток больше частного и делится нацело на частное. Чему может быть равно n?

Ответ: 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.

Решение: Нет смысла делить на числа, большие 20, так как частное будет равно 0 и остаток не может на него делиться. Также нет смысла делить на делители числа 20, то есть на 1, 2, 4, 5, 10 и 20, поскольку остаток будет равен 0 и не может быть больше частного.

Если $10 < n < 20$, то частное равно 1 и остаток делится на него. Не подходит только $n = 19$, так как в этом случае частное и остаток равны.

Для остальных n запишем результат деления с остатком: $20 = 3 \cdot 6 + 2$, $20 = 6 \cdot 3 + 2$, $20 = 7 \cdot 2 + 6$, $20 = 8 \cdot 2 + 4$, $20 = 9 \cdot 2 + 2$. Условию удовлетворяют только $n = 7$ и $n = 8$.

Задача 2. (6 баллов) Известно, что $ac + ad + bc + bd = 100$, $c + d = 20$. Найдите $a + b + c + d$.

Ответ: 25.

Решение: Первое равенство из условия можно переписать в виде $(a + b)(c + d) = 100$. Так как $c + d = 20$, то $a + b = 100:20 = 5$, откуда $a + b + c + d = 5 + 20 = 25$.

Задача 3. (6 баллов) Найдите наибольшее натуральное число, в котором разность между любыми двумя цифрами не равна ни 0, ни 4.

Ответ: 987610.

Решение: Из цифр 9, 5, 1 можно взять не более двух, аналогично из 8, 4, 0, а из пар (7, 3) и (6, 2) – не более чем одну цифру. Значит, число не более чем шестизначное. Среди шестизначных берём то, в котором цифры убывают.

Задача 4. (7 баллов) Чему равна площадь многоугольника, изображенного на рисунке 1?

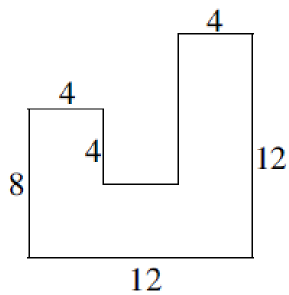

Рисунок 1

Ответ: 96.

Решение: Разобьём многоугольник двумя вертикальными прямыми на три прямоугольника – 4×8, 4×4 и 4×12 (неизвестные длины сторон легко определяются из рисунка), сумма их площадей равна 96.

Задача 5. (9 баллов) Сколько решений имеет ребус Р×Е×(Б + У + С) = 33 (разными буквами обозначены различные цифры)?

Ответ: 48.

Решение: Так как ни Р, ни Е не равны 11, а также оба не могут быть равны 1, то Р×Е = 3 и Б + У + С = 11. Значит, Р = 1 и Е = 3 или наоборот, а для тройки (Б, У, С) имеем варианты (0, 2, 9), (0, 4, 7), (0, 5, 6), (2, 4, 5), внутри которых можно делать любые перестановки. Итого $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$ решений.

Задача 6. (11 баллов) Алексей купил на рынке козу и кочан капусты, Борис – волка и кочан капусты, а Вадим – волка и козу. Заплаченные ими деньги относятся как 6:7:8. Вместе волк, коза и кочан капусты стоят 84 тугрика. Сколько они стоят по отдельности?

Ответ: волк – 36, коза – 28, капуста – 20.

Решение: Пусть коза стоит g, капуста – c, а волк – w тугриков. Тогда вместе покупатели заплатили $2(g + c + w) = 168$ тугриков, и это надо разделить в пропорции 6:7:8. Находим, что $g + c = 48$, $c + w = 56$, $g + w = 64$, откуда и получаем все стоимости.

Задача 7. (12 баллов) Решите систему уравнений $xy^2 = 100$, $x^2y^3 = 2000$.

Ответ: $(x, y) = (4, 5)$.

Решение: Возведём первое уравнение в квадрат и разделим на второе, в результате получим $y = 5$. Подставляя результат в первое уравнение, получим $x = 4$.

Задача 8. (13 баллов) Когда лиса откусила у двух медвежат по одинаковому кусочку сыра, у первого медвежонка осталось в 9 раз меньше сыра, чем у второго. После этого лиса снова откусила у каждого медвежонка точно по такому же кусочку, и у первого осталось в 13 раз меньше сыра, чем у второго. Во сколько раз меньше сыра было у первого медвежонка, чем у второго, до прихода лисы?

Ответ: в 7 раз.
Решение: После первого откусывания разность кусков стала в 8 раз больше, чем кусок первого медвежонка. После второго откусывания та же разность в 12 раз больше, чем кусок первого медвежонка. Будем считать, что разность составляет 24 доли. Тогда после первого откусывания у первого медвежонка осталось три доли сыра, а после второго – две доли. Значит, лиса откусывала по одной доле, поэтому вначале у первого медвежонка было четыре доли сыра, а у второго – на 24 больше, то есть 28 долей.

Задача 9. (15 баллов) Треугольник разрезали по всем его трём биссектрисам так, что получилось шесть треугольников. Сколько среди них могло оказаться прямоугольных?
Ответ: 0, 2 или 6.
Решение: Прямые углы могут быть только между основанием биссектрисы и стороной. При вершинах треугольника прямых углов не бывает, потому что каждый угол меньше 180°, а при точке пересечения биссектрис не бывает, потому что там каждый угол равен полусумме двух углов треугольника. Таким образом, вопрос сводится к тому, сколько биссектрис могут одновременно являться и высотами треугольника – каждая такая биссектриса даёт два прямоугольных треугольника. Если исходный треугольник равносторонний, то таких биссектрис три, если равнобедренный – одна, а если неравнобедренный – ни одной.

Задача 10. (16 баллов) После проведения МатКэт n школьников из одного города были награждены дипломами победителя. Мэр города отметил, что среди любых пяти победителей найдётся не менее одной и не более пяти пар одноклассников. При каком наибольшем n такое возможно?
Ответ: 12.
Решение: 1) Победители учатся не более чем в четырёх разных классах, иначе можно было бы взять по одному человеку из пяти классов, и среди них не нашлось бы пары одноклассников. 2) В каждом классе не более трёх победителей, иначе среди четырёх одноклассников нашлось бы $(4\cdot 3):2 = 6$ пар. Следовательно, максимум может быть $4\cdot 3 = 12$ победителей.
Пример строится по оценке: по три человека из четырёх классов. Так как два одноклассника образуют одну пару, а три одноклассника – три пары, то легко убедиться, что среди любых пяти победителей всегда не более четырёх пар одноклассников.