Ответы и решения задач «красного» уровня сложности MathCat

Задача 1. (5 баллов) Петя Коля и Миша ели пирожные. Петя и Коля съели на 16 больше, чем Миша, а Коля и Миша на 8 больше, чем Петя. Сколько пирожных съел Коля?
Ответ: 12.
Решение: Обозначим буквами П, К, и М то, сколько ребята съели соответственно. Тогда $\text{П} + \text{К} = \text{М} + 16$ и $\text{К} + \text{М} = \text{П} + 8$, сложив эти выражения, и сократив одинаковые буквы получим $2\text{К} = 24$, откуда ответ 12.

Задача 2. (6 баллов) На доске написано верное равенство $2 \cdot 401^2 + 2 \cdot 399^2 = x^2 + y^2$. Найдите какие-нибудь натуральные x и y.
Ответ: $x = 800; y = 2$ или $x = 2; y = 800$
Решение: заметим, что $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$, откуда видно что подходят числа $a + b = 800$ и $a - b = 2$.

Задача 3. (7 баллов) На доске написано число 16742. Коля дописал в него одну цифру (не обязательно последнюю), и число стало делиться на 36. Какое число могло получиться?
Ответ: 167472
Решение: Сумма цифр записанного числа равна 20. По признаку делимости на 9 сумма цифр нового числа должна делиться на 9, значит, не хватает цифры 7. Ее можно поставить только предпоследней, так как по признаку делимости на 4, число образованное последними двумя цифрами должно делиться на 4.

Задача 4. (7 баллов) Встретились мальчики и девочки. Коля дружит с 8 девочками, а Петя – с 10. При этом для любых трех девочек каждый из пришедших мальчиков дружит хотя бы с одной из них. Сколько могло быть девочек?
Ответ: 10
Решение: Девочек не может быть больше 10, так как тогда есть три девочки, ни одна из которых не дружит с Колей. По условию их хотя бы 10, значит, всего 10.

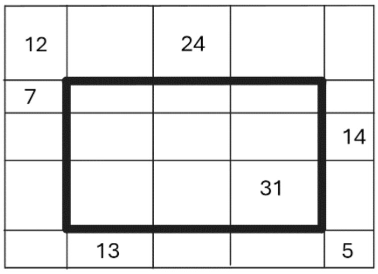
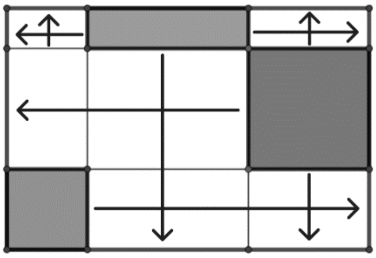
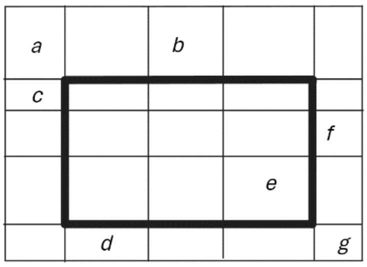


Рисунок 1





Задача 5. (10 баллов) Прямоугольник на рисунке 1 разделили четырьмя горизонтальными и четырьмя вертикальными разрезами. В каждом из получившихся маленьких прямоугольников написали периметр, затем некоторые периметры стерли, остались только те, что подписаны на картинке. Найдите периметр центрального прямоугольника 3×3 (выделен жирным цветом).
Ответ: 72
Лемма: Если в прямоугольнике, разрезанном параллельно сторонам на меньшие прямоугольники выбрать такой набор прямоугольников, чтобы в каждом столбце и в каждой строке было выбрано по одному, то сумма их периметров будет равна периметру всего прямоугольника. В этом не сложно убедиться, “сдвинув” стороны маленьких прямоугольников, на стороны большого. На картинке это показано на примере разрезания двумя вертикальными и двумя горизонтальными разрезами.
Решение: Заменим числа в прямоугольниках буквами, как показано на рисунке. Тогда, по Лемме $b + c + e + f + d$ – периметр всего прямоугольника. Также, периметр всего прямоугольника получается, если сложить искомый периметр с a и g, понять это можно мысленно удалив средние два вертикальных и средние два горизонтальных разреза.
Значит ответ $b + c + e + f + d - a - g = 7 + 24 + 13 + 31 + 14 - 12 - 5 = 72$.

Задача 6. (10 баллов) Нарисован квадрат 10×10. Его граница раскрашена в красный цвет, а все внутренние линии в черный. Некоторые внутренние узелки сетки тоже перекрасили в красный цвет. Назовем отрезок хорошим, если его концы раскрашены в красный цвет, а все внутренние точки – в черный. На доске оказалось 40 хороших отрезков. Сколько могло быть красных внутренних узелков?
Ответ: 11
Решение: В квадрате, где все внутренние узелки черные, всего 18 хороших отрезков, так как каждая линия сетки является хорошим отрезком. Каждое перекрашивание узелка в красный добавляет два хороших

отрезка, так как разрывает на две части один горизонтальный и один вертикальный хорошие отрезки. Значит, красных узелков $(40-18):2=11$.

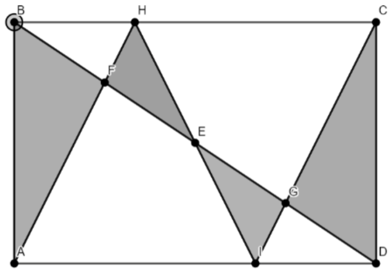


Рисунок 2

Задача 7. (12 баллов) В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB=8$ и $BC=12$ диагональ BD разбита на 4 равные части точками F, E и G, как показано на рисунке 2. Найдите сумму закрашенных площадей.

Ответ: 32.

Решение: Треугольники BHF и FHE равновелики, так как HF медиана треугольника $BHE.$ Аналогично для треугольников EIG и GID. Тогда искомая площадь равна сумме площадей треугольников ABH и ICD, эти два треугольника равны, и из них можно сложить прямоугольник со сторонами АВ и ВН. Заметим, что треугольники BHF и DAF подобны по двум углам, откуда $\frac{BH}{AD}=\frac{BF}{FD}=\frac{1}{3}$. Значит, искомая площадь в три раза меньше площади всего прямоугольника, и равна 60.

Задача 8. (14 баллов) По кругу стояло 100 человек, каждый из которых или рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда врет. Каждого спросили про стоящего справа от него человека, рыцарь он или лжец. Было получено 70 ответов “рыцарь”. Затем каждого спросили про человека, который стоит слева через одного от него рыцарь он или лжец. Какое наименьшее количество ответов “рыцарь” могло быть получено?

Ответ: 40

Решение: Ответ “рыцарь” равносилен тому, что говорящий и тот, про кого он говорит, одинаковые, а ответ “лжец” – что они разные. Будем думать только про пары соседних людей. Поставим 1 между ними, если они разные, и 0, если одинаковые. В нашем кругу всего 30 единиц, и остальные нули. Ответ про человека, стоящего через одного, – сумма двух рядом стоящих чисел по модулю 2. Одна 1 участвует не более чем в двух парах с разными числами, значит, всего не более 60 ответов “лжец”. Пример для цифр 1 и 0 получается, если расставить все 0 так, чтобы среди них не было соседних, сделать это очевидно возможно. По такому набору цифр можно восстановить пример для рыцарей и лжецов следующим образом: возьмем любого человека и назначим его рыцарем, и начнем читать наш круг из нулей единиц с любого места. Переходя к соседнему человеку, будем ставить его того же типа что и предыдущий если прочитали 0, и другого – если прочитали 1. Так как единиц в круге четное число, то получится корректная конструкция из рыцарей и лжецов.

Задача 9. (14 баллов) На доске написан многочлен $P(x)=-\frac{7}{6}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{8}{3}$, вместо x подставили в него $P(x)$, получили $P\big(P(x)\big)$, и так далее получили $P(P(P\big(\ldots.P(x)\big)\ldots)$ (всего 10 букв P в записи). Найдите сумму коэффициентов полученного многочлена.

Ответ: 2

Решение: Сумма коэффициентов любого многочлена $A(x)$ это $A(1)$. Нас интересует $P(P(P\big(\ldots.P(1)\big)\ldots)$. Несложно заметить, что $P(1)=2;\ P(2)=-1;\ P(-1)=2$. Значит, $P\Big(P\big(P(1)\big)\Big)=1$, и буквы P со скобками можно убирать по 3 штуки. Значит, ответ равен просто $P(1)=2$.

Задача 10. (15 баллов) 9 жирафов-фотографов разного роста встают по кругу. Каждый фотографирует всех остальных, не сходя с места (на фотографии получаются все остальные жирафы слева направо в порядке обхода от автора фотографии по часовой стрелке). Назовем фотографию хорошей, если на ней в обе стороны от самого высокого жирафа все остальные стоят по убыванию роста. Сколько у жирафов способов встать в круг так, чтобы среди 9 сделанных в этом кругу фотографий было ровно 3 хороших?

Ответ: 128

Решение: пронумеруем жирафов по росту от минимального (1) до максимального (9). Заметим, что если 1 есть на хорошей фотографии, то он стоит с краю. Значит, хорошие фотографии могут быть только от 1 и его соседей. Теперь посмотрим на фотографию жирафа 1. На его хороших фотографиях 2 стоит с краю. Соответственно, если у нас 3 хороших фотографии, то 1 и 2 стоят рядом. Заметим, что если мы уберем 1 и 2 из круга с хорошими фотографиями, то остальные стоят в хорошем порядке. Посчитаем количество таких расстановок из 7 жирафов. Для этого возьмем жирафа 9 и выберем любую группу жирафов, которые будут стоять справа от него (таких групп $2^6=64$). Эта группа должна быть расположена в порядке убывания. А группа слева - в порядке возрастания. При любом таком варианте и при любом расположении 1 и 2 относительно друг друга, и только при таких расстановках, мы получаем по 3 хороших фотографии. Итого ответ $2^7=128$ (две расстановки жирафов 1 и 2 и по 64 расстановки остальных для каждой из них)