Ответы и решения задач «жёлтого» уровня сложности MathCat

Задача 1. (5 баллов) На доске написали шестизначное число. У него посчитали сумму цифр, а у полученного числа — ещё раз сумму цифр. Какое наибольшее число могло получиться?
Ответ: 13.
Решение: Сумма цифр шестизначного числа от 1 до 54, наибольшая сумма цифр у чисел от 1 до 54 равна 4 + 9 = 13. Пример: сумма цифр числа 999994 равна 49, а сумма цифр числа 49 равна 13.

Задача 2. (7 баллов) На рамке из 18 клеток, показанной на рисунке 1, нужно поставить две шахматные ладьи, одну — красную, другую — синюю. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы ладьи не били друг друга?

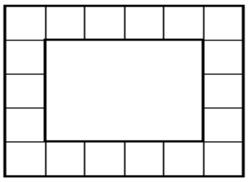

Рисунок 1

Ответ: 206.
Решение: Впишем в каждую клетку, сколькими способами можно поставить синюю ладью, есть в эту клетку поставить красную ладью. Ответом служит сумма полученных чисел.

8	12	12	12	12	8
13					13
13					13
13					13
8	12	12	12	12	8

Комментарий. Пусть рамка шириной x клеток и высотой y клеток. Тогда в углах будут записаны числа $x + y - 3$, на горизонтальной стороне — числа $x + 2y - 4$, на вертикальной стороне — числа $2x + y - 4$. Сумма всех чисел равна $4(x + y - 3) +$ $+2(x - 2)(\ x + 2y - 4) + 2(y - 2)(2x + y - 4) = 2x^2 + 2y^2 + 8xy - 16x - 16y + 20$.

Задача 3. (8 баллов) На отрезок сверху ставят вплотную 10 квадратов со сторонами 1, 2, 3, …, 10 в каком-то порядке. Пример такой фигуры приведен на рисунке 2. Из набора убрали квадрат со стороной 2 и составили такую же фигуру наибольшего возможного периметра. Чему равен этот периметр?

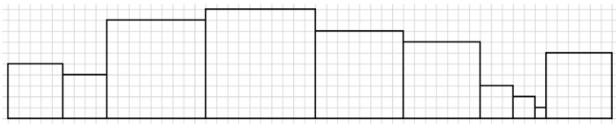

Рисунок 2

Ответ: 160.
Решение: Оценка. Рассмотрим 8 отрезков, которые являются границами соседних квадратов. Периметр фигуры равен сумме периметров квадратов без удвоенной суммы этих отрезков. Сумма указанных отрезков должна быть наименьшей. Она не более 1 + 1 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 = 2 + 6 + 8 + 10 = 26.
Из суммы периметров квадратов 4 · (1 + 2 + … + 10) – 4 · 2 = 220 – 8 = 212 каждый отрезок вычитается дважды, поэтому искомый равна максимальный периметр равен 212 – 2 · 26 = 160.
Пример с периметром следует из оценки. Будем чередовать большие квадраты со сторонами от 6 до 10 и малые квадраты со сторонами 1, 3, 4, 5.

Задача 4. (9 баллов) В двух мешочках золотые и бронзовые монеты (не обязательно одинаковые). Первый мешочек весит 200 граммов и в нём 80 % массы — золото. Во втором мешочке 50 % массы — золото. Всего золото составляет 70 % от общей массы. Сколько весит второй мешочек?
Ответ: 100 граммов.
Решение: В первом мешочке 160 граммов золота. Пусть второй мешочек весит $2x$ граммов, в нём по x граммов золота и серебра. Общая масса $200 + 2x$. Получаем соотношение $100(160 + x) = 70(200 + 2x)$, откуда $16000 + 100x = 14000 + 140x$, $40x = 2000$, $x = 50$. Второй мешочек весит $2x = 100$ граммов.

Задача 5. (9 баллов) Число 253 умножили на число, составленное из *N* единиц, и получили число с суммой цифр 3456. Найдите *N*.
Ответ: 3438.
Решение: Умножение в столбик устроено как показано на рисунке.
Количество единиц в ответе равно 3456 – (2 + 8 + 0 + 8 + 3) = 3456 – 21 = 3435. Количество слагаемых равно 3435 + 3 = 3438, что равно искомому количеству единиц.

```
              2 5 3
            2 5 3
          2 5 3
        2 5 3
      . . .
    2 5 3
  2 5 3
2 5 3
---------------------
2 8 1 . . . 1 1 0 8 3
```

Задача 6. (10 баллов) В сосуде был сироп. Часть его отлили и долили столько же воды. Затем, перемешав, отлили такую же часть и сосуд опять долили водой. В сосуде отношение сиропа и воды оказалось 9 : 7. Какую часть отливали?
Ответ: 1/4.

Решение: Будем измерять воду в сосудах. Пусть было 1 сосуд сиропа и отливали t часть. Тогда сначала стало t воды. Затем вылили t^2 воды и налили t воды. Итого стало $2t - t^2$ воды или 7/16. Не сложно подобрать, что $t = 1/4$. Из смысла задачи следует, что ответ один.

Задача 7. (12 баллов) Женя решил вести активный образ жизни и бегать на стадионе. Перед пробежкой он берет с собой флажки, которые расставляет во время пробежки вдоль беговой дорожки. Первый флажок соответствует началу дорожки, этот флажок Женя устанавливает на старте. Длина одного круга стадиона 504 метра. Женя сначала расставил 33 флажка на расстоянии 24 метра друг от друга, затем развернулся, побежал в обратном направлении, расставил еще 20 флажков через каждый 40 метров. Сколько получится точек вдоль беговой дорожки, в которых установлено больше одного флажка?
Ответ: 14 точек с несколькими флажками.
Решение: Пусть Женя по дороге туда ставит синие флажки, а на пути обратно – красные. Сначала он пробежит 32 · 24 = 768 метров в одном направлении, что менее 2 кругов. Затем пробежит 20 · 40 = 800 метров в обратном направлении, что также менее 2 кругов.
Так как 504 : 24 = 21, то начиная с 21-го синего флажка положение нового синего будет совпадать со старым. От 21-го до 33-го флажков всего 13 положений.
Так как НОК (504; 40) = 2520 > 2 · 504, то положения никаких двух красных флажка не совпадут.
Совпадут ли одиночные синие флажки с красными? От точки поворота в обратном направлении до одиночных синих флажков будет 21 – 13 = 6 положений на расстоянии 13 · 24, 14 · 24, …, 18 · 24 метров. Из них кратно 40 метрам только 15 · 24. Поэтому только там одиночные синие наложатся на красные.
Итого 13 + 1 = 14 искомых точек.

Задача 8. (12 баллов) Четырёхугольник *ABCD* таков, что *BC* = 2*AB*, угол *BDC* — прямой, *AD* и *BC* параллельны, угол *BCD* равен 54°. Найдите величину угла *BAD*.
Ответ: 72° или 108°.
Решение: Пусть *DM* — медиана *BCD*. Тогда *ABMD* — параллелограмм или равнобокая трапеция. Отсюда два ответа. Если ∠*BCD* = α, то ∠*BAD* = 2α или ∠*BAD* = 180° – 2α. Если α = 54°, то искомый угол 72° или 108°.

Задача 9. (14 баллов) Сколько целых значений k, при которых прямая $y = kx$ не пересекает параболы $y = x^2 - 20x + 123$ и $y = x^2 + 30x + 300$?
Ответ: 7.
Решение: Нужно найти целые значения k, при которых уравнения $x^2 - 20x + 123 = kx$ и $x^2 + 30x + 300 = kx$ не имеют корней. Это квадратные уравнения $x^2 - (20 + k)x + 123 = 0$ и $x^2 + (30 - k)x + 300 = 0$, поэтому их дискриминанты отрицательные:
$$(20+k)^2 - 492 < 0 \text{ и } (30-k)^2 - 1200 < 0 \Leftrightarrow \{(20+k)^2 < 22\ (30-k)^2 < 34 \Leftrightarrow -22 \le 20 + k \le 22 \text{ и } -34 \le 30 - k \le 34 \Leftrightarrow -42 \le k \le 2 \text{ и } -4 \le k \le 64.$$
Подойдут значения *k* от –4 до 2, всего 7 значений.

Задача 10. (14 баллов) Есть белая клетчатая полоска 1×66. Какое наименьшее число клеток можно закрасить, чтобы у любой клетки (в том числе закрашенной) была хотя бы одна соседняя клетка закрашена?
Ответ: 34.
Указание (для построения примера): Чередуются группы закрашенных и незакрашенных клеток.
В каждой группе закрашенных не менее 2 клеток, в каждой группе незакрашенных не более 2 клеток.
Решение: Оценка. Нарисуем стрелку от каждой клетки к закрашенному соседу. Всего не менее 66 стрелок. На каждую закрашенную клетку показывают не более 2 стрелок. Значит, всего не менее 33 закрашенных клеток.
При этом, если закрашено только 33 клетки, то из каждой клетки выходит ровно одна стрелка, в каждую клетку приходит ровно 2 стрелки. Значит, закрашенные и незакрашенные клетки стоят парами, что невозможно.
Значит, закрашено не менее 34 клеток. Такое возможно. Пример:

1	2	3	4	5	6	7	8	…	59	60	61	62	63	64	65	66