Ответы и решения задач «зелёного» уровня сложности MathCat

Задача 1. (5 баллов) Лепрекон живёт в 10 км от работы. Налегке он добирается из дома до работы за 10 минут. Через каждый километр на его пути лежит по слитку золота (всего девять слитков: № 1, № 2, …, № 9). Если он подбирает слиток, то его скорость падает в 2 раза. За какое время (в минутах) лепрекон доберётся до работы, если по пути подберёт слитки № 3, № 4 и № 8?

Ответ: 37.

Решение: Разделим путь гнома на работу на 10 равных частей по 1 км. Понятно, что без слитков золота гном проходит 1 км за 1 минуту. Тогда до первого слитка он шел 1 минуту. и до второго. Подняв слиток номер 3, он стал идти ещё в 2 раза медленнее, теперь километр проходит за 4 минуты. И так далее. Итого он потратит $1 + 1 + 1 + 2 + 4 + 4 + 4 + 4 + 8 + 8 = 37$ минут.

Задача 2. (5 баллов) Учитель задумал двузначное число, которое делится на 6 и 8. Затем он сообщил Пете и Васе по одной цифре этого числа. Петя сказал: «Я не знаю, какая цифра у Васи». Вася ответил: «Я не знаю твою цифру, но теперь знаю, какое число было задумано». Какое число задумал учитель?

Ответ: 24.

Решение: Двузначные числа кратные 24: 24, 48, 72 и 96. У Пети может быть цифра 2 или 4. У Васи – аналогично. Значит могло быть задумано только число 24.

Задача 3. (7 баллов) Все ученики школы приняли участие в Математическом флешмобе MathCat. Среднее количество баллов, набранных мальчиками, оказалось равно 72, девочками – 52, а среднее число баллов во всей школе – 64. Какова доля (в процентах) девочек в этой школе?

Ответ: 40.

Решение: Пусть в команде x мальчиков и y девочек. Тогда общее число баллов, набранных всеми учениками, равно $72x + 52y = 64(x + y)$, откуда находим $8x = 12y$. Поэтому доля девочек равна
$y / (x + y) = 8y / (8x + 8y) = 8y / 20y = 0{,}4$, т. е. 40 %.

Задача 4. (9 баллов) Пролетая над Зачарованным лесом, Дятел превращает бегонию в жасмин или пион в колокольчик. А Тукан, пролетая над лесом, превращает бегонию в пион или жасмин в колокольчик. За день Дятел пролетел 15 раз, а Тукан – 12 раз. В итоге количество жасминов увеличилось на 10. Как изменилось количество пионов? (Пролетая над лесом, птица совершает одно из двух превращений.)

Ответ: увеличилось на 7.

Решение: После пролёта Дятла либо на 1 увеличивается количество b жасминов, либо на 1 уменьшается количество s пионов, т. е. разность $b - s$ всегда увеличивается на 1. После Тукана – наоборот: либо на 1 уменьшается количество b жасминов, либо на 1 увеличивается количество s пионов, т. е. разность $b - s$ всегда уменьшается на 1. В итоге разность $b - s$ увеличилась на 15 и уменьшилась на 12, значит, в итоге она увеличилась на 3. Раз b увеличилось на 10, то s увеличилось на $10 - 3 = 7$.

Задача 5. (10 баллов) Для целых чисел a, b и c верно равенство $2a + 3b = 6b + 5c = 4c + 7a$. Найдите наименьшее положительное значение суммы $a + b + c$.

Ответ: 17.

Решение: Покажем, что $a = 9t$, $b = 11t$, $c = -3t$. Из первого равенства получаем $2a = 3b + 5c$, а из второго $6b = -c + 7a$. Подставим a: $6b = -c + 7(3b + 5c) / 2 = 21b / 2 + 33c / 2$; $-3b = 11c$; $b = -11c/3$.
Если $c = -3t$ (t – целое число), то $b = 11t$ и $a = (33t - 15t) / 2 = 9t$. Тогда $a + b + c = 17t$, и наименьшая положительная сумма равна 17.

Задача 6. (10 баллов) На рисунке 1 большой прямоугольник площади 2024 кв. ед. разделён прямыми линиями на 16 меньших прямоугольников (пропорции на рисунке могут отличаться от настоящих). Площадь серого прямоугольника равна 926 кв. ед. Найдите площадь нарисованного восьмиугольника в кв. ед.

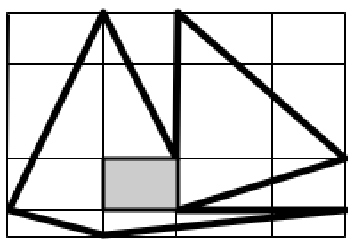
Рисунок 1

Ответ: 1475.

Решение: Рассмотрим прямоугольники с диагоналями в сторонах восьмиугольника (кроме, вертикальной левой стороны). От каждого такого прямоугольника внутрь восьмиугольника попала ровно половина площади. С другой стороны, суммарная площадь этих прямоугольников равна 2024 − 926 = 1098. Значит, искомая площадь равна 926 + (2024 − 926) / 2 = 1475 (кв. ед.).

Задача 7. (12 баллов) Никита задумал четырёхзначное число и умножил его на 9. Он с удивлением обнаружил, что сумма цифр полученного произведения равна 9. Но после он забыл задуманное число, но смог вспомнить некоторые его цифры – 1**5. Какое число мог задумать Никита?
Ответ: 1115, 1125, 1135, 1145, 1225, 1235, 1245, 1335, 1345, 1445.
Решение: Воспользуемся фактом, что в искомом числе цифры тысяч, сотен и десятков должны идти в порядке неубывания, а цифра единиц должна быть больше цифры десятков. Докажем это: пусть дано число $abcd$ и $a \le b \le c < d$. Тогда $abcd \cdot 9 = abcd0 - abcd$. Будем в скобках записывать цифры получившейся разности: $a(b-a)(c-b)(d-c-1)(10-d)$. Легко увидеть, что сумма цифр получившегося числа будет равна 9. Если хотя бы одна пара цифр находится в другом отношении друг к другу, например, c и d, то сумма цифр увеличивается хотя бы на 9, то есть будет равна хотя бы 18: $a(b-a)(c-b-1)(10+d-c-1)(10-d)$. Далее находим возможные варианты: 1115, 1125, 1135, 1145, 1225, 1235, 1245, 1335, 1345, 1445.

Задача 8. (13 баллов) В остроугольном треугольнике ABC угол A равен 40º, отрезки BB_1 и CC_1 – высоты, точки B_2 и C_2 – середины сторон AC и AB соответственно. Прямые B_1C_2 и C_1B_2 пересекаются в точке K. Найдите величину (в градусах) угла B_1KB_2.
Ответ: 60.
Решение: Заметим, что углы B и C треугольника ABC больше, чем $\angle A = 40º$ (в противном случае он был бы тупоугольным), поэтому точка C_1 лежит на стороне AB между точками B и C_2, а точка B_1 лежит на стороне AC между точками C и B_2. Поэтому точка K пересечения прямых B_1C_2 и C_1B_2 лежит внутри треугольника. Поскольку C_1B_2 – медиана прямоугольного треугольника CC_1A, треугольник C_1B_2A равнобедренный. Следовательно, $\angle AB_1C_2 = 40º$. Аналогично получаем $\angle AC_1B_2 = 40º$, откуда $\angle AB_2C_1 = 180º - 2 \cdot 40º = 100º$. Тогда $\angle B_1KB_2 = \angle AB_2K - \angle AB_1K = 100º - 40º = 60º$.

Задача 9. (14 баллов) Клетки некоторой клетчатой фигуры на плоскости раскрашены в красный, желтый и зеленый цвета так, что любые две клетки, имеющие общую сторону, покрашены в разные цвета. Коля разрезал фигуру на доминошки (прямоугольники 1 × 2) и сосчитал количество красно-зелёных доминошек (у которых одна клетка красная, а другая зелёная) – 30 штук. Костя разрезал фигуру на доминошки другим способом и сосчитал количество желто-зелёных и желто-красных доминошек – всего 24 штуки. Из скольких клеток может состоять фигура?
Ответ: 108.
Решение: Заметим, что количество доминошек в обоих разбиениях одинаково и равно половине количества клеток фигуры. При этом в каждой доминошке, кроме красно-зелёной, содержится ровно одна жёлтая клетка. Поэтому количество красно-зелёных доминошек равно общему количеству доминошек, уменьшенному на количество жёлтых клеток и, следовательно, не зависит от разбиения. Как и количество желто-зелёных и желто-красных. Значит в фигуре было (30 + 24) · 2 = 108 клеток.

Задача 10. (15 баллов) У натуральных чисел n и $n+1$ выбрали по собственному делителю. Сумма этих двух собственных делителей оказалась равна 252. При каком наименьшем n такое могло быть? (Собственный делитель числа – натуральный делитель числа, отличный от 1 и самого числа.)
Ответ: 302.
Решение: Отметим, что самый большой собственный делитель числа M не превышает $M/2$, а следующий за ним – $M/3$. Но так как числа n и $n+1$ разной чётности, то самый большой делитель у одного из чисел не превышает половины, а у другого – трети: $n / 3 + (n + 1) / 2 \ge 252$, $n \ge 302$. Проверим: 302 не делится на 3, а 303 не делится на 2. Тогда 302 / 2 + 303 / 3 = 151 + 101 = 252.