

# Ответы и решения задач «жёлтого» уровня сложности MathCat



**Задача 1.** (5 баллов) На доске написали пятизначное число. У него посчитали сумму цифр, а у полученного числа — ещё раз сумму цифр. Какое наибольшее число могло получиться?

**Ответ:** 12.

**Решение:** Сумма цифр пятизначного числа от 1 до 45, наибольшая сумма цифр у чисел от 1 до 45 равна  $3 + 9 = 12$ . Пример: сумма цифр числа 99993 равна 39, а сумма цифр числа 39 равна 12.

**Задача 2.** (7 баллов) На рамке из 18 клеток, показанной на рисунке 1, нужно поставить две шахматные ладьи, одну — красную, другую — синюю. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы ладьи не били друг друга?

**Ответ:** 198.

**Решение:** Впишем в каждую клетку, сколькими способами можно поставить синюю ладью, есть в эту клетку поставить красную ладью. Ответом служит сумма полученных чисел.

**Комментарий.** Пусть рамка шириной  $x$  клеток и высотой  $y$  клеток. Тогда в углах будут записаны числа  $x + y - 3$ , на горизонтальной стороне — числа  $x + 2y - 4$ , на вертикальной стороне — числа  $2x + y - 4$ . Сумма всех чисел равна  $4(x + y - 3) + 2(x - 2)(x + 2y - 4) + 2(y - 2)(2x + y - 4) = 2x^2 + 2y^2 + 8xy - 16x - 16y + 20$ .

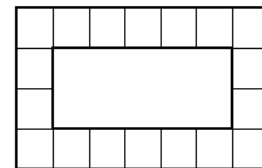


Рисунок 1

8	11	11	11	11	11	8
14						14
14						14
8	11	11	11	11	11	8

**Задача 3.** (8 баллов) На отрезок сверху ставят вплотную 10 квадратов со сторонами 1, 2, 3, ..., 10 в каком-то порядке. Пример такой фигуры приведен на рисунке 2. Из набора убрали квадрат со стороной 4 и составили такую же фигуру наибольшего возможного периметра. Чему равен этот периметр?



Рисунок 2

**Ответ:** 160.

**Решение:** Оценка. Рассмотрим 8 отрезков, которые являются границами соседних квадратов. Периметр фигуры равен сумме периметров квадратов без удвоенной суммы этих отрезков. Сумма указанных отрезков должна быть наименьшей. Она не более  $1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 5 + 5 = 2 + 4 + 6 + 10 = 22$ . Из суммы периметров квадратов  $4 \cdot (1 + 2 + \dots + 10) - 4 \cdot 4 = 220 - 16 = 204$  каждый отрезок вычитается дважды, поэтому искомым равна максимальный периметр равен  $204 - 2 \cdot 22 = 160$ .

Пример с периметром следует из оценки. Будем чередовать большие квадраты со сторонами от 6 до 10 и малые квадраты со сторонами 1, 2, 3, 5.

**Задача 4.** (9 баллов) В двух мешочках золотые и бронзовые монеты (не обязательно одинаковые). Первый мешочек весит 200 граммов и в нём 20 % массы — золото. Во втором мешочке 50 % массы — золото. Всего золото составляет 40 % от общей массы. Сколько весит второй мешочек?

**Ответ:** 400 граммов.

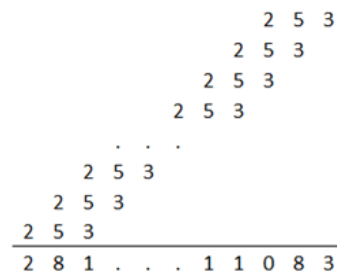
**Решение:** В первом мешочке 40 граммов золота. Пусть второй мешочек весит  $2x$  граммов, в нём по  $x$  граммов золота и серебра. Общая масса  $200 + 2x$ . Получаем соотношение  $100(40 + x) = 40(200 + 2x)$ , откуда  $4000 + 100x = 8000 + 80x$ ,  $20x = 4000$ ,  $x = 200$ . Второй мешочек весит  $2x = 400$  граммов.

**Задача 5.** (9 баллов) Число 253 умножили на число, составленное из  $N$  единиц, и получили число с суммой цифр 1234. Найдите  $N$ .

**Ответ:** 1216.

**Решение:** Умножение в столбик устроено как показано на рисунке.

Количество единиц в ответе равно  $1234 - (2 + 8 + 0 + 8 + 3) = 1234 - 21 = 1213$ . Количество слагаемых равно  $1213 + 3 = 1216$ , что равно искомому количеству единиц.



**Задача 6.** (10 баллов) В сосуде был сироп. Часть его отлили и долили столько же воды. Затем, перемешав, отлили такую же часть и сосуд опять долили водой. В сосуде отношение сиропа и воды оказалось 5 : 4. Какую часть отливали?

**Ответ:** 1/3.

**Решение:** Будем измерять воду в сосудах. Пусть было 1 сосуд сиропа и отливали  $t$  часть. Тогда сначала стало  $t$  воды. Затем вылили  $t^2$  воды и налили  $t$  воды. Итого стало  $2t - t^2$  воды или  $4/9$ . Не сложно подобрать, что  $t = 1/3$ . Из смысла задачи следует, что ответ один.

**Задача 7.** (12 баллов) Женя решил вести активный образ жизни и бегать на стадионе. Перед пробежкой он берет с собой флажки, которые расставляет во время пробежки вдоль беговой дорожки. Первый флажок соответствует началу дорожки, этот флажок Женя устанавливает на старте. Длина одного круга стадиона 588 метров. Женя сначала расставил 33 флажка на расстоянии 33 метра друг от друга, затем развернулся, побежал в обратном направлении, расставил еще 51 флажок через каждый 21 метр. Сколько получится точек вдоль беговой дорожки, в которых установлено больше одного флажка?

**Ответ:** 24 точки с несколькими флажками.

**Решение:** Пусть Женя по дороге туда ставит красные флажки, а на пути обратно — синие. Сначала он пробежит  $32 \cdot 33 = 1056$  метров в одном направлении, что менее 2 кругов. Затем пробежит  $51 \cdot 21 = 1071$  метров в обратном направлении, что также менее 2 кругов.

Так как НОК  $(588; 33) = 6468 > 2 \cdot 588$ , то положения никаких двух красных флажка не совпадут.

Так как  $588 : 21 = 28$ , то начиная с 29-го синего флажка положение нового синего будет совпадать со старым. От 29-го до 51-го флажков всего 22 положения.

Совпадут ли одиночные синие флажки с красными? От точки поворота до одиночных синих Женя пробежит  $29 \cdot 21, 30 \cdot 21, \dots, 51 \cdot 21$  метров. Из них кратны 33 метрам только  $33 \cdot 21, 44 \cdot 21$ . Поэтому только там одиночные синие наложатся на красные.

Итого  $22 + 2 = 24$  искомым точек.

**Задача 8.** (12 баллов) Четырёхугольник  $ABCD$  таков, что  $BC = 2AB$ , угол  $BDC$  — прямой,  $AD$  и  $BC$  параллельны, угол  $BCD$  равен  $64^\circ$ . Найдите величину угла  $BAD$ .

**Ответ:**  $52^\circ$  или  $128^\circ$ .

**Решение:** Пусть  $DM$  — медиана  $BCD$ . Тогда  $ABMD$  — параллелограмм или равнобокая трапеция. Отсюда два ответа. Если  $\angle BCD = \alpha$ , то  $\angle BAD = 2\alpha$  или  $\angle BAD = 180^\circ - 2\alpha$ . Если  $\alpha = 64^\circ$ , то искомым угол  $52^\circ$  или  $128^\circ$ .

**Задача 9.** (14 баллов) Сколько целых значений  $k$ , при которых прямая  $y = kx$  не пересекает параболы  $y = x^2 - 40x + 450$  и  $y = x^2 + 10x + 39$ ?

**Ответ:** 5.

**Решение:** Нужно найти целые значения  $k$ , при которых уравнения  $x^2 - 40x + 450 = kx$  и  $x^2 + 10x + 39 = kx$  не имеют корней. Это квадратные уравнения  $x^2 - (40 + k)x + 450 = 0$  и  $x^2 + (10 - k)x + 39 = 0$ , поэтому их дискриминанты отрицательные:

$(40 + k)^2 - 1800 < 0$  и  $(10 - k)^2 - 156 < 0 \Leftrightarrow (40 + k)^2 < 1800$  и  $(10 - k)^2 < 156 \Leftrightarrow -42 \leq 40 + k \leq 42$   
и  $-12 \leq 10 - k \leq 12 \Leftrightarrow -82 \leq k \leq 2$  и  $-2 \leq k \leq 22$ .

Подойдут значения  $k$  от  $-2$  до  $2$ , всего 5 значений.

**Задача 10.** (14 баллов) Есть белая клетчатая полоска  $1 \times 62$ . Какое наименьшее число клеток можно закрасить, чтобы у любой клетки (в том числе закрасенной) хотя бы одна соседняя клетка была закрасена?

**Ответ:** 32.

**Указание (для построения примера):** Чередуются группы закрасенных и незакрасенных клеток. В каждой группе закрасенных не менее 2 клеток, в каждой группе незакрасенных не более 2 клеток.

**Решение:** Оценка. Нарисуем стрелку от каждой клетки к закрасенному соседу. Всего не менее 62 стрелки. На каждую закрасенную клетку показывают не более 2 стрелок. Значит, всего не менее 31 закрасенных клеток.

При этом, если закрасено только 31 клеток, то из каждой клетки выходит ровно одна стрелка, в каждую клетку приходит ровно 2 стрелки. Значит, закрасенные и незакрасенные клетки стоят парами, что невозможно. Значит, закрасено не менее 32 клеток. Такое возможно. Пример:

1	2	3	4	5	6	7	8	...	55	56	57	58	59	60	61	62
---	---	---	---	---	---	---	---	-----	----	----	----	----	----	----	----	----