

Задачи «красного» уровня сложности MathCat



Задача 1. (5 баллов) Петя Коля и Миша ели пирожные. Петя и Коля съели на 15 больше, чем Миша, а Коля и Миша на 11 больше, чем Петя. Сколько пирожных съел Коля?

Задача 2. (6 баллов) На доске написано верное равенство $2 \cdot 1701^2 + 2 \cdot 1699^2 = x^2 + y^2$. Найдите какие-нибудь натуральные x и y .

Задача 3. (7 баллов) На доске написано число 26674. Коля дописал в него одну цифру (не обязательно последнюю), и число стало делиться на 36. Какое число могло получиться?

Задача 4. (7 баллов) Встретились мальчики и девочки. Коля дружит с 9 девочками, а Петя – с 11. При этом для любых трех девочек каждый из пришедших мальчиков дружит хотя бы с одной из них. Сколько могло быть девочек?

Задача 5. (10 баллов) Прямоугольник на рисунке 1 разделили четырьмя горизонтальными и четырьмя вертикальными разрезами. В каждом из получившихся маленьких прямоугольников написали периметр, затем некоторые периметры стерли, остались только те, что подписаны на картинке. Найдите периметр центрального прямоугольника 3×3 (выделен жирным цветом).

14		23		
9				
				10
			27	
	11			7

Рисунок 1

Задача 6. (10 баллов) Нарисован квадрат 10×10 . Его граница раскрашена в красный цвет, а все внутренние линии в черный. Некоторые внутренние узелки сетки тоже перекрасили в красный цвет. Назовем отрезок хорошим, если его концы раскрашены в красный цвет, а все внутренние точки – в черный. На доске оказалось 70 хороших отрезков. Сколько могло быть красных внутренних узелков?

Задача 7. (12 баллов) В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 10$ и $BC = 12$ диагональ BD разбита на 4 равные части точками F, E и G , как показано на рисунке 2. Найдите сумму закрашенных площадей.

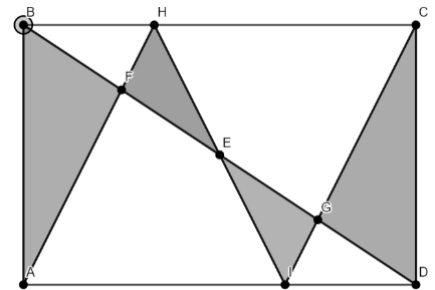


Рисунок 2

Задача 8. (14 баллов) По кругу стояло 100 человек, каждый из которых или рыцарь, всегда говорящий правду, или лжец, который всегда врет. Каждого спросили про стоящего справа от него человека, рыцарь он или лжец. Было получено 30 ответов “рыцарь”. Затем каждого спросили про человека, который стоит слева через одного от него рыцарь он или лжец. Какое наименьшее количество ответов “рыцарь” могло быть получено?

Задача 9. (14 баллов) На доске написан многочлен $P(x) = \frac{7}{6}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{2}{3}$, вместо x подставили в него $P(x)$, получили $P(P(x))$, и так далее получили $P(P(P(\dots P(x)) \dots))$ (всего 10 букв P в записи). Найдите сумму коэффициентов полученного многочлена.

Задача 10. (15 баллов) 12 жирафов-фотографов разного роста встают по кругу. Каждый фотографирует всех остальных, не сходя с места (на фотографии получаются все остальные жирафы слева направо в порядке обхода от автора фотографии по часовой стрелке). Назовем фотографию хорошей, если на ней в обе стороны от самого высокого жирафа все остальные стоят по убыванию роста. Сколько у жирафов способов встать в круг так, чтобы среди 12 сделанных в этом кругу фотографий было ровно 3 хороших?