Ответы и решения задач «зеленого» уровня сложности MathCat.ONLINE

Задача 1. (6 баллов) Петя сложил число и номер месяца своего дня рождения. Когда у Пети может быть день рождения, если в результате он получил 42?

Ответ: 30 декабря.

Решение: В календаре нет чисел больше 31, поэтому день рождения у Пети может быть только в ноябре или в декабре. Если он в ноябре, то приходится на $42 - 11 = 31$ число, однако в ноябре 30 дней. Остаётся единственная возможность – 30 декабря.

Задача 2. (7 баллов) На заборе написаны десять утверждений: «Неверных утверждений здесь на 1 больше, чем верных», «Неверных утверждений здесь на 2 больше, чем верных», …, «Неверных утверждений здесь на 10 больше, чем верных». Сколько на самом деле среди этих утверждений неверных?

Ответ: 9.

Решение: Заметим, что все утверждения противоречат друг другу, поэтому среди них не более одного верного. Если неверными являются все десять утверждений, то последнее из них оказывается верным и мы получаем противоречие. Значит, одно из утверждений верное, а неверных, соответственно, девять.

Задача 3. (8 баллов) На краю пустыни поселились Пожиратели Песка. Аппетит у них отменный: два Пожирателя съедают 1 тонну песка за 1 час. Сколько тонн песка могут съесть шесть Пожирателей за 24 часа, если после каждых двух часов еды им нужен час перерыва на переваривание пищи?

Ответ: 48.

Решение: Шесть Пожирателей съедают за час в 3 раза больше, чем два Пожирателя, т.е. 3 тонны песка. Значит, за три часа они съедят 6 тонн, поскольку один из этих трёх часов занимает перерыв. Тогда за 24 часа шесть Пожирателей съедят $6 \cdot 8 = 48$ тонн песка.

Задача 4. (9 баллов) Коля выписал на доску все натуральные числа от 1 до n. Оказалось, что среди них восемь чисел делятся на 6 и шесть чисел делятся на 7. Чему может быть равно n?

Ответ: 48.

Решение: Из первого условия следует, что $n \geq 6 \cdot 8 = 48$, а из второго – что $n < 7 \cdot 7 = 49$. Следовательно, $n = 48$.

Задача 5. (10 баллов) Какое наибольшее число кружочков можно закрасить на рисунке так, чтобы никакие три закрашенных кружочка не образовывали равносторонний треугольник? (См. рис. 1)

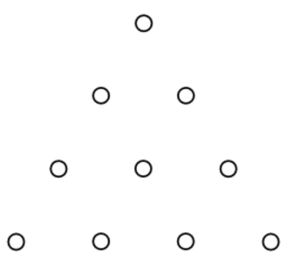
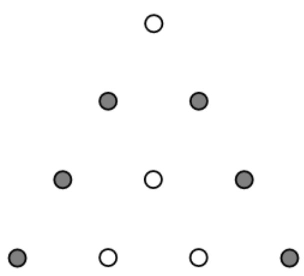


Рисунок 1

Ответ: 6.

Решение: Из трёх угловых кружочков можно закрасить не более двух. Остальные кружочки образуют правильный шестиугольник с центром. Вершины шестиугольника, взятые через одну, являются вершинами равностороннего треугольника, поэтому закрашено может быть не более четырёх вершин шестиугольника. А если закрасить центральный кружочек, то из каждых двух соседних вершин шестиугольника может быть закрашено не более одной. В любом случае всего закрасить можно не более шести кружочков. На рисунке показан пример из шести закрашенных кружочков, удовлетворяющий условию



Задача 6. (10 баллов) За круглым столом через равные промежутки сидят 20 мальчиков и 32 девочки. Известно, что если мальчик и девочка сидят рядом, то напротив них тоже сидит пара из мальчика и девочки. Сколько в этом круге мальчиков, которые сидят напротив девочек?

Ответ: 0.

Решение: Круг разбивается на группы сидящих подряд детей одного пола. По условию стыки между группами находятся друг напротив друга, поэтому и сами группы сидят друг напротив друга. При этом группы мальчиков не могут сидеть напротив групп девочек, иначе мальчиков и девочек было бы поровну. Следовательно, все мальчики сидят напротив мальчиков.

Задача 7. (11 баллов) Известно, что дроби $\frac{\overline{x9}}{\overline{9y}}$ и $\frac{x}{y}$ равны. Найдите разность $y - x$, если x и y – различные цифры.

Ответ: 4.

Решение: Запишем условие в виде $\frac{10x+9}{90+y} = \frac{x}{y}$ и преобразуем полученное уравнение: $(10x + 9)y = x(90 + y) \Leftrightarrow 10xy + 9y = 90x + xy \Leftrightarrow 9xy + 9y = 90x \Leftrightarrow (x + 1)y = 10x$. Следовательно, $(x + 1)y$ делится на 10. Учитывая, что $y \neq 0$, это возможно в трёх случаях.

1) $x = 9$. Тогда из уравнения получаем $y = 90:10 = 9$, но это противоречит тому, что x и y – различные цифры.
2) $x = 4$, y – чётная цифра. Тогда $y = 40:5 = 8$.
3) $y = 5$, x – нечётная цифра. Тогда $x + 1 = 2x$, откуда $x = 1$.

Таким образом, $y - x$ в любом случае равно 4, поскольку $8 - 4 = 5 - 1 = 4$.

Задача 8. (11 баллов) Палиндромом называется число, которое слева направо и справа налево читается одинаково. Сколько существует 100-значных чисел, в записи которых участвуют только цифры 1, 2, 3 и которые не содержат палиндромов длины более 1?

Ответ: 6.

Решение: На первом месте в числе может быть любая из трёх цифр. На втором – любая из двух оставшихся, а дальше число определяется однозначно, поскольку каждая следующая цифра должна отличаться от предыдущей и от той, которая стоит перед ней. Итого получаем $3 \cdot 2 = 6$ возможных чисел.

Задача 9. (13 баллов) На основании AC равнобедренного треугольника ABC взяли точку D так, что $\angle ADB = 120°$. Оказалось, что $AD = 4$, $BD = 5$. Найдите длину основания AC.

Ответ: 13.

Решение: Отметим на стороне AC такую точку E, что $EC = 4$. Тогда в силу симметрии $\angle CEB = 120°$, поэтому в треугольнике DBE углы D и E равны по 60°, т.е. он равносторонний. Следовательно, $DE = BD = 5$ и $AC = AD + DE + EC = 4 + 5 + 4 = 13$.

Задача 10. (15 баллов) Все натуральные делители двузначного числа выписали в порядке возрастания. Оказалось, что четвёртый делитель на два больше второго, а шестой – на три больше третьего. Чему может быть равно это двузначное число?

Ответ: 60.

Решение: Первый делитель числа равен 1. Из условия следует, что следующие пять делителей – последовательные числа. Из любых пяти последовательных чисел найдутся числа, кратные 3, 4 и 5, а так как каждые два из этих чисел взаимно просты, то искомое число делится на $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$. При этом оно двузначное, поэтому может быть равно только 60. Легко убедиться, что это число удовлетворяет условию.