



Ответы и решения задач «зеленого» уровня сложности MathCat

Задача 1. (5 баллов) Многочлен $Ax^2 + Bx + C$ имеет корни -7 и 1 . Какие корни имеет многочлен $-Ax^2 + Bx - C$?

Ответ: -1 и 7 .

Решение 1: Корни квадратного трёхчлена $Ax^2 + Bx + C$ можно найти по формуле $\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$. Корни трёхчлена $-Ax^2 + Bx - C$ по формуле $\frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{-2A}$, откуда видно, что корни отличаются только знаками.

Решение 2: Заметим, что многочлен $-Ax^2 + Bx - C$ имеет те же корни, что и многочлен $Ax^2 - Bx + C$. Но этот многочлен имеет корни, симметричные корням исходного многочлена $Ax^2 + Bx + C$ относительно начала координат. Например, потому, что если у многочлена $Ax^2 + Bx + C$ есть корень t , то есть $At^2 + Bt + C = 0$, то $A(-t)^2 - B(-t) + C = 0$ тоже.

Задача 2. (5 баллов) Буратино зарыл на Поле Чудес серебряную монету. Из нее выросло дерево, а на нем – две монеты: серебряная и золотая. Золотую монету Буратино спрятал в мешок, а серебряную зарыл, и опять выросло дерево. Каждый раз на дереве вырастали две монеты: либо две золотые, либо золотая и серебряная, либо две серебряные. Золотые монеты Буратино складывал в мешок, а серебряные закапывал. Когда закапывать стало нечего, в мешке у Буратино было 12345 золотых монет. Сколько монет закопал Буратино?

Ответ: 12344

Решение: Заметим, что в результате одного «закапывания» количество монет увеличивается на 1. Поскольку сначала у него была одна монета, а стало 12345, то он закопал 12344 монеты.

Задача 3. (7 баллов) На доске написано несколько натуральных чисел, причём все цифры в их записи имеют одну и ту же чётность. Сумма всех чисел равна 7007. Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске?

Ответ: 3

Решение: В данной сумме присутствуют цифры разной четности. Поэтому это не может быть одно число. Заметим также, что сумма чисел нечётна. Это значит, что было просуммировано нечётное количество нечётных чисел. И как было доказано выше, больше одного. Следующий вариант – три числа. Для трёх чисел есть пример: 3775, 3115, 117.

Задача 4. (7 баллов) Столяр дядя Федя сложил рядом три одинаковые доски и тремя распилами, как показано на рисунке (См. рис. 1), получил 9 деревянных кусочков. Известно, что длина доски составляет 1 метр. Сколько кусочков он получит, если возьмёт 8 таких же досок и сделает 8 подобных распилов?

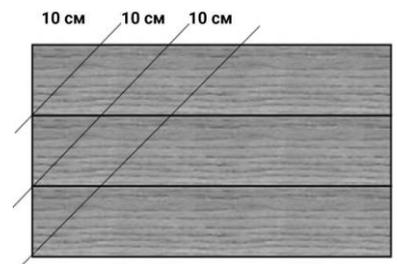


Рисунок 1

Ответ: 44

Решение: Заметим, что максимальное количество кусочков получается на верхней доске, а каждая следующая доска при разрезании даёт на 1 кусочек меньше. Так как всего распилов 7, то на верхней доске 8 кусочков, на следующей – 7 и так далее до самой нижней, на которой кусочков на 6 меньше, чем на самой верхней, то есть 2. Отсюда общее количество получившихся кусочков: $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 44$.

Задача 5. (10 баллов) Вершину треугольника соединили отрезками со 111 различными точками, взятыми на противоположащей стороне. Сколько новых треугольников образовалось в итоге?

Ответ: 6327.

Решение: Заметим, что всего на противоположащей стороне треугольника будет отмечено 113 точек, включая 2 вершины треугольника. Каждый треугольник задается какими-то двумя точками из 113 точек на

противолежающей стороне, то есть надо посчитать количество способов выбрать из 113 точек ровно 2. Это число равно $113 \cdot 112 : 2 = 6328$, так как на первое место можно выбрать одну из 113 точек. Для каждого такого выбора приходится ровно 112 способов выбрать вторую точку – все кроме первой. Но каждый вариант в таком случае считается 2 раза, потому что не имеет разницы, выбрать ли сначала точку А, а потом точку В или наоборот, поэтому надо полученное число поделить на 2. Осталось вычесть один исходный треугольник, который уже был, поэтому новых треугольников получится 6327.

Задача 6. (12 баллов) Кощей Бессмертный решил собрать сундук изумрудов и в первый день положил в пустой сундук 1 изумруд. На следующий день положил туда 2 изумруда и так далее – каждый следующий день он клал в сундук на 1 изумруд больше, чем в предыдущий. Однако во вторую ночь Баба Яга стащила из сундука 1 изумруд и каждую следующую ночь тащила на 1 изумруд больше. Как только в сундуке наберётся 7777 изумрудов, Кощей его запечатает и спрячет, и баба Яга не сможет красть. На какой день это произойдёт?

Ответ: 1012

Решение: Рассмотрим, как изменяется количество изумрудов в сундуке по дням.

2 день – 3 изумруда (положил 2), 2 ночь – 2 изумруда (украли 1)

3 день – 5 изумрудов (положил 3), 3 ночь – 3 изумруда (украли 2)

4 день – 7 изумрудов (положил 4), 4 ночь – 4 изумруда (украли 3)

...

N день – (2N – 1) изумруд (положил N), N-я ночь – N изумрудов (украли N-1)

Можно заметить, что максимальное количество изумрудов в сундуке достигается днём. Нам нужно, чтобы $2N - 1 = 7777$, откуда $N=3889$. То есть на 3889 день в сундуке впервые окажется 7777 изумрудов и в этот день Кощей сундук запечатает и спрячет.

Задача 7. (12 баллов) В стеклянной коробке размером 4x4x4 ячейки в некоторых ячейках лежат конфеты (в каждой ячейке не более одной). Маша, Саша и Паша смотрят на эту коробку с трех сторон: Маша – спереди, Саша – сверху, а Паша – сбоку. Какое максимальное количество конфет может лежать в коробке, если все они видны по 4 конфеты (если какие-то конфеты лежат друг за другом, то наблюдатели видят только первую конфету)?

Ответ: 8

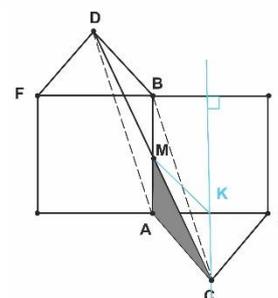
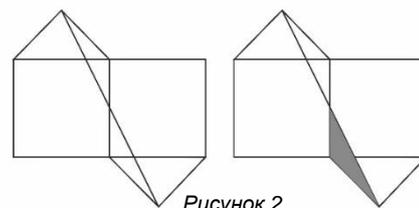
Решение: Предположим, что конфет 9 или больше. Это значит, что за какой-то конфетой (конфетами) лежит еще хотя бы две конфеты, то есть имеется ряд (вертикальный или горизонтальный), в котором три или четыре конфеты. Это означает, что с двух других ракурсов двое других наблюдателей видят все эти три или четыре конфеты. Если есть ряд из четырёх конфет, то с двух других ракурсов наблюдатели видят все эти четыре конфеты, то есть оставшиеся должны быть расположены так, чтобы к видимым конфетам не добавить ни одной, что невозможно. Или же (если ряд из трёх конфет) оставшиеся 6 или более конфет должны быть так расположены, чтобы добавить к уже видимым трём конфетам ещё только одну. Однако, поскольку конфет не менее 6, то за какой-то из этих трёх конфет расположены две конфеты, которые видны хотя бы для одного из наблюдателей одновременно с уже имеющимися тремя. Таким образом, получается, что для какого-то наблюдателя будут видны хотя бы 5 конфет, что противоречит условию.

Пример на 8 конфет есть: в каждом углу лежит по конфете.

Задача 8. (12 баллов) На рисунке (См. рис. 2) изображены два квадрата и два одинаковых равнобедренных треугольника. Известно, что площадь квадрата равна 24. Найдите площадь серого треугольника.

Ответ: 3

Решение: Заметим, что треугольники ABD и BAC равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AD=BC$ и ACBD – параллелограмм и его диагонали делятся точкой пересечения пополам. То есть M – середина AB. Поскольку треугольник ACE – равнобедренный, то линия, проведенная через C параллельно стороне квадрата AB, проходит через середину стороны AE – точку K. Так как у треугольников AMK и AMC одно и то же основание и равны высоты, опущенные



на это основание, то и площади этих треугольников равны. А площадь треугольника АМК – восьмая часть площади исходного квадрата.

Задача 9. (15 баллов) Тринадцати мудрецам надели разноцветные колпаки: синего, белого, красного, жёлтого, фиолетового и зелёного цвета. Причем известно, что колпаки всех цветов присутствуют. Мудрецы сидят в кругу, они видят колпаки всех людей, но не видят цвет своего колпака. Сначала всех мудрецов одновременно спросили: «Ваш колпак зелёный?» Никто не ответил ни «да», ни «нет». Через минуту этот вопрос снова повторили всем мудрецам. Несколько мудрецов сказали «да». Сколько мудрецов ответило теперь «да»?

Ответ: 2

Решение: Поскольку в первый раз никто не сказал ни «да», ни «нет», это значит, что каждый видел колпаки всех цветов. Так как если бы какой-то цвет был в одном экземпляре, то мудрец с этим колпаком немедленно это обнаружил бы и сказал либо «да», либо «нет». Значит, каждого цвета хотя бы два колпака. То есть два синих, два белых, два красных, два жёлтых, два фиолетовых, два зелёных – это 12 колпаков. Рассмотрим оставшийся тринадцатый колпак. Если он зелёный, то каждый из трёх мудрецов с зелёным колпаком видит перед собой все цвета по два раза и не может сделать вывод, какого цвета его колпак. Если же тринадцатый колпак любого другого цвета кроме зелёного, то теперь все, у кого колпаки не этого цвета точно знают свой цвет. В том числе и обладатели зелёных колпаков. А так как по условию есть те, кто сказал «да», то это мудрецы в зелёных колпаках. И их ровно двое.

Задача 10. (15 баллов) На доске было написано «ДА ЗДРАВСТВУЕТ МАТКЭТ!». Костя и Вася решили сыграть в следующую игру: каждый в свой ход может зачеркнуть любое количество одинаковых букв. Выигрывает тот, кто зачеркнет последнюю букву. Начинает Костя. Как ему нужно играть, чтобы гарантированно выиграть? В ответе укажите первый ход – какие буквы нужно зачеркнуть.

Ответ: Т

Решение: Разобьём буквы на группы одинаковых.

ЗРСУЕМКЭ – 8 групп по одной букве

ДД ВВ – две группы по две буквы

ААА – одна группа из трёх букв

ТТТТ – одна группа из четырёх букв.

Если первым ходом зачеркнуть одну букву Т, то получившиеся группы можно разбить на две симметричные части. Например, З, Р, С, У, ДД, ААА и Е, М, К, Э, ВВ, ТТТ. И теперь Костя будет повторять ходы Васи, а именно: если Вася зачеркивает одиночную букву в одной части, то Костя также зачеркивает одиночную букву в другой части. Если Вася зачеркивает сколько-то букв (одну, две или три) из группы из двух или трёх букв, то Костя совершает аналогичное действие в другой части. Тем самым у Кости всегда есть ход и после его хода позиция симметрична, а после хода Васи – нет. Это значит, что ситуацию «нет букв» сможет после своего хода получить только Костя, а именно зачеркнуть последнюю букву.

Докажем теперь, что другие варианты не гарантируют выигрыш.

Действительно, если Костя зачеркнет что-то другое, то Вася сможет сделать симметричную позицию и воспользоваться ранее описанной стратегией.

Если зачеркнет какое-то количество букв Т (но не одну), то:

если ТТ, то Вася зачеркивает А;

если ТТТ, то Вася – АА ;

если ТТТТ, то Вася ААА.

Если Костя зачеркнет А, то Вася – ТТ, если АА, то Вася – ТТТ, если ААА, то ТТТТ.

Если же Костя зачеркнет любую одиночную букву, то Вася – ТТ. Тогда получится группа ААА, три группы из двух букв и семь из одной. И теперь после любого хода Кости Вася одним ходом делает четное количество как групп из двух букв, так и из одиночных букв и снова использует симметричную стратегию.

Если Костя зачеркнет не Т и не А, а одну букву из двух одинаковых, то Вася – ТТТТ и снова у нас одна пара, одна тройка и 9 одиночных букв. И после любого хода Кости Вася одним ходом делает четное количество как групп из двух букв, так и из одиночных букв и снова использует симметричную стратегию.