



Ответы и решения задач «красного» уровня сложности MathCat

Задача 1. (6 баллов) Ежик, Барсук и Заяц бегают вокруг опушки. Причем Ежик и Заяц по часовой стрелке, а Барсук – против часовой стрелки. Скорость Заяца в три раза больше скорости Ежика. Барсук встречает Ежика каждые пять минут, а Заяца – каждые три минуты. Как часто встречаются Ежик и Заяц, если скорости всех зверей постоянны? Ответ дайте в секундах.

Ответ: 450

Решение: Обозначим скорость Ежика за E , скорость Барсука за B , скорость зайца за $З$. По условию Ежик и Барсук вместе проходят полный круг за пять минут, а Барсук и Заяц за три минуты, тогда $5(E+B)=3(B+З)=3(B+3E)$, раскрыв скобки получим $5E+5B=3B+9E$, значит, $B=2E$. Так как Ежик и Барсук проходят круг за пять минут, то Ежик пробежит круг за 15 минут, а скорость, с которой Заяц догоняет Ежика, в два раза больше собственной скорости Ежика. Значит, Заяц догоняет Ежика каждые 7,5 минут, или 450 секунд.

Задача 2. (6 баллов) На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды собралась компания, в которой присутствовали как те, так и другие. Каждого, кроме Пети, спросили: «Сколько среди вас рыцарей?». Было получено пятнадцать ответов «14», шестнадцать ответов «17», семнадцать ответов «18». Какой ответ мог бы дать на такой же вопрос Петя?

Ответ: 17, 18, 1

Решение: По условию должен быть хотя бы один рыцарь. Если единственным рыцарем является Петя, то он скажет «1». В противном случае есть хотя бы один рыцарь среди ответивших на вопрос и, значит, прозвучал правильный ответ. Заметим, что все рыцари отвечают всегда на вопрос одинаково, а все ответившие на вопрос правильно должны быть рыцарями. Если правильный ответ «14», то рыцарей всего должно быть 14, но все группы одинаковых ответов содержат больше 14 человек. Если правильный ответ «17», то те 16 человек, кто ответили «17», являются рыцарями, и среди отвечавших на вопрос других рыцарей нет, значит, оставшийся рыцарь Петя, и он ответит «17». Если правильным ответом является «18», то 17 человек, ответивших «18», являются рыцарями, и оставшимся рыцарем должен быть Петя. В этом случае он тоже ответит «18».

Задача 3. (9 баллов) Двое продавцов выставили одинаковую цену на товар. После этого каждый день первый продавец или увеличивал цену на 400%, или уменьшал ее на 50%, а второй увеличивал каждый день либо на 60%, либо на 25%. Через какое наименьшее количество дней могло оказаться так, что у продавцов снова одинаковые цены?

Ответ: 7

Решение: Пусть первый продавец x раз увеличил цену на 400% и y раз уменьшил на 50%, а второй a раз увеличил на 60%, и b раз увеличил на 25%. Тогда изменения цены первого это $(500/100)^x \cdot (50/100)^y$, а изменения цены второго $(160/100)^a \cdot (125/100)^b$. Заметим, что $x+y=a+b$, а значит, от знаменателя 100 можно везде избавиться. Тогда $160^a \cdot 125^b = 500^x \cdot 50^y$. Разложим числа на простые множители, тогда $(2^5 \cdot 5)^a \cdot (5^3)^b = (5^3 \cdot 2^2)^x \cdot (2 \cdot 5^2)^y$. Приравняв количество пятерок и двоек, получим систему уравнений:

$$a+b=x+y,$$

$$5a=2x+y,$$

$$a+3b=3x+2y$$

Выразив все через a , получим $x=3a/2$, $y=2a$, $b=5a/2$. Тогда минимальное $a=2$, а минимальная сумма $a+b=7$.

Задача 4. (9 баллов) Оля по очереди закрашивает клетки таблицы 5×9 . Закрасив какую-нибудь клетку, она записывает на бумажку сумму количеств пустых клеток в строке и в столбце с закрашенной. Какой может быть сумма всех выписанных ею чисел, когда всё поле будет закрашено?

Ответ: 270

Решение: Каждое из чисел, выписанных Олей можно разложить в сумму двух - количества пустых клеток в столбце и количества пустых клеток в строке. Рассмотрим только количества пустых по

строкам. В каждой строке для первой закрашенной клетки будет выписано число 4, для второй число 3 и т.д. Значит, сумма таких чисел в каждой строке это $0+1+2+3+4=10$. Аналогично сумма в каждом столбце $0+1+2+\dots+8=36$. Значит, общая сумма всех чисел это $36 \cdot 5+10 \cdot 9=270$.

Задача 5. (9 баллов) В ряд стоят 10 коробочек с конфетами, каждая из которых красная или синяя. Из каждой красной переложили по конфете во все синие, стоящие правее нее, а из каждой синей – во все красные, которые правее нее. В результате в синих коробочках стало на 21 конфету больше. Сколько могло быть красных коробочек?

Ответ: 3, 5, 7

Решение: Каждая пара разноцветных коробочек ровно один раз участвовала в перекладывании. Пусть было a перекладываний из синих в красные, и b перекладываний из красных в синие, тогда $b-a=21$. Если красных коробочек x , то синих $10-x$, а, значит, количество пар разноцветных коробочек равно $10x-x^2$, и это равно сумме всех перекладываний, $a+b=10x-x^2$. Если x меньше 3 или больше 7, то $10x-x^2 < 21$, а, значит, и количество конфет в синих коробочках не могло вырасти на 21. Кроме того, красных коробочек не могло быть четное число, потому что иначе $a+b=10x-x^2$ число четное, а, значит, и $a-b$ число четное, но 21 нечетное. Следовательно, возможные ответы это 3, 5 и 7. На каждый из ответов есть пример.

Пример на 3: KKKCCCCSS

Пример на 5: KKKKCKCCCC

Пример на 7: KKKKKKKCCCC

Задача 6. (10 баллов) В трапеции $ABCD$ основание AD вдвое больше основания BC . Точка K лежит на отрезке BC , а точка M – середина AB . Площадь трапеции равна 12, а суммарная площадь серых частей равна 2. Найдите площадь черного куска. (См. рис. 1)

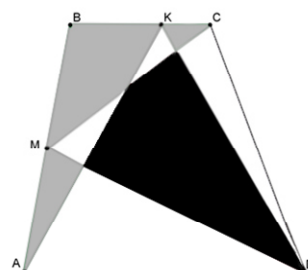


Рисунок 1

Ответ: 4

Решение: Пусть высота трапеции равна h , а $BC=x$. Тогда площадь трапеции равна $S=h(AD+BC)/2=3hx/2$. Площадь треугольника $ADK=h(2x)/2=hx=(2/3)S$. Сумма площадей треугольников AMD и MBC равна $AD \cdot h/2+BC \cdot h/2=(h/2)(3x/2)=(1/2)S$, а значит и площадь треугольника $CMD=(1/2)S$. Тогда сумма площадей треугольников AKD и CMD равна $(1/2)S+(2/3)S=(7/6)S$, то есть на $(1/6)S$ больше чем площадь трапеции. Заметим, что черная часть – это часть, “покрытая” треугольниками AKD и CMD дважды, а серая – это не покрытая вообще. Значит, разность площадей черной и серых частей тоже составляет $(1/6)S=2$; тогда площадь черной части равна $2+2=4$.

Задача 7. (10 баллов) Числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений:

$$x^2+4y^2+5z^2=66,$$

$$xz+yz=8,$$

$$x+2y+3z=14.$$

Найдите значение $4y-x$.

Ответ: 7.

Решение: Умножив вторую строку на 4 и прибавив к первой, получим $x^2+4xz+4z^2+z^2+4zy+4y^2=98$, или $(x+2z)^2+(2y+z)^2=98$. Сделав замены $x+2z=a$ и $2y+z=b$, получим $a^2+b^2=98$ и $a+b=14$. Отсюда можно выразить $2ab=(a+b)^2-a^2-b^2=98$. Откуда $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=0$, следовательно, $a=b=7$, а $4y-x=2b-a=7$.

Задача 8. (12 баллов) На картинке в качестве примера изображено шестиугольное поле 3×4 . Где-то на шестиугольном поле 10×12 спрятался кораблик 1×2 . За какое наименьшее количество выстрелов можно гарантированно попасть в него хотя бы один раз? Каждый выстрел попадает ровно в одну шестиугольную ячейку на этом поле. (См. рис. 2)

Ответ: 80

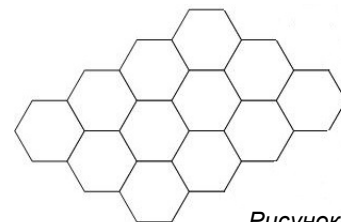
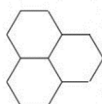
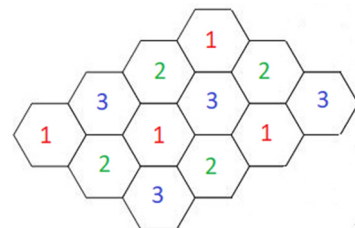


Рисунок 2

Решение: В каждом таком “треугольнике” должно быть подбито хотя бы две клетки, иначе две неподбитых клетки образуют кораблик 1×2 . Параллелограмм 10×12 разрезается на параллелограммы 2×3 , а значит и на указанные “треугольники”. Значит всего нужно хотя бы 80 клеток. Пример на 80 получается, если в такой раскраске выстрелить во все клетки любых двух цветов.



Задача 9. (14 баллов) На передней грани куба со стороной 100 сидит паук. Его координаты относительно правой верхней вершины: 1 влево, 5 вниз. На верхней грани сидит муха. Её координаты относительно той же вершины: 2 влево, 7 вперёд. Найти квадрат длины кратчайшего пути от паука до мухи по поверхности параллелепипеда.

Ответ: 113.

Решение: Заметим, что кратчайший путь должен представлять собой отрезок прямой на развёртке куба. Необходимо сравнить длины двух возможных путей паука: первый через ребро между передней и верхней гранью, а второй через правую грань (длина любого пути, выходящего за пределы этих трех граней, заведомо больше 100). Если паук ползет через ребро, развернем верхнюю и переднюю грани в одну плоскость, в этой плоскости путь паука должен быть отрезком. Длину такого пути можно рассчитать по теореме Пифагора, разница координат будет 1 и 12, а значит длина пути $\sqrt{144+1} = \sqrt{145}$. В случае же, если паук ползет по правой грани, развернем грани нашего куба в плоскость этой грани. Тогда в ней путь паука также должен быть отрезком. Его длину тоже можно узнать по теореме Пифагора, разности координат между пауком и мухой составляют 7 и 8, а значит длина $\sqrt{49+64} = \sqrt{113}$.

Задача 10. (15 баллов) В магазине продаются открытки. Все открытки представлены в 6 разных цветах, с 8 разными надписями и с 10 разными картинками (в наличии имеются открытки с любым сочетанием указанных трёх признаков). Какое максимальное количество открыток можно купить так, чтобы среди них не было двух одинаковых и не было двух, у которых совпадает ровно 1 признак?

Ответ: $6+8+10-6=18$

Решение: Будем решать задачу в общем случае. Пусть открытки бывают n цветов, с m надписями и k картинками. Сопоставим каждой открытке трехзначный код, где первая цифра от 1 до m соответствует цвету, вторая от 1 до n и соответствует надписи, а третья от 1 до k и соответствует картинке.

Любые две открытки отличаются либо в одном либо сразу в трех параметрах.

Рассмотрим любые две открытки отличающиеся ровно в одном параметре. Тогда любая другая открытка или отличается от них в том же параметре, или во всех трех сразу. Действительно, пусть наши открытки имеют вид abx и aby , тогда любая другая открытка, если в первых двух разрядах у нее стоит не ab , отличается хотя бы от одной из abx и aby хотя бы в двух разрядах; но так как открытки не могут отличаться в ровно двух разрядах, то она отличается во всех трех.

Таким образом, все открытки делятся на 4 группы: (1) множество открыток, каждая из которых отличается от всех остальных во всех разрядах (2) множество открыток, отличающихся хоть с какой-то другой только цветом (3) множество открыток, отличающихся хоть с какой-то другой только надписью (4) множество открыток, отличающихся хоть с какой-то другой только картинкой. Заметим, что каждая открытка из первой группы запрещает всем остальным занимать один цвет, одну надпись и одну картинку. Мысленно удалим эти открытки и уменьшим на их количество соответственно m , n и k .

Пусть теперь нашлись две открытки abx и aby в максимальном наборе совпавшие в каких-то двух разрядах. Тогда ни одна другая открытка из набора уже не может оканчиваться ни на x ни на y . Действительно, если она оканчивается на x , то у нее должно быть или a на первом месте или b на втором, но тогда она совпадает с aby ровно по одному признаку.

Пусть теперь в группе (4) найдется хотя бы $k-1$ открыток. Значит, у всех остальных открыток одинаковая картинка, и, следовательно, они совпадают в одних и тех же двух разрядах. Тогда всего оставшихся открыток не больше чем максимум из $m-1$ и $k-1$, а всего в нашем наборе их не более $k-1 + \max(n-1; m-1)$. Аналогично по остальным параметрам, если в группе (2) хотя бы $n-2$, то всего открыток не более чем $n-1 + \max(m-1; k-1)$, и если в группе (3) хотя бы $m-2$, то $m-1 + \max(n-1; k-1)$. Подставив данные из нашей задачи, получим что тогда всего не более 16 открыток.

Если же открыток, отличающихся по каждому из параметров, не больше чем $x-2$, где x – количество вариантов этого параметра, то всего открыток не больше чем $m+n+k-6=18$. На это число есть пример.

111	112	113	114	115	116	117	118	229	239	249
259	269	279	38(10)		48(10)		58(10)		68(10)	