Ответы и решения задач «красного» уровня сложности MathCat

1. (5 баллов) Задача из рассказа “Репетитор” А.П.Чехова “Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное - 3 руб. за аршин?”

Ответ: 63; 75.
Решение: Если бы все сукно было 5-рублевым, то покупка стоила бы 138*5=690 рублей. Но она стоила дешевле на 690-540=150 рублей, потому что часть денег была потрачена на более дешевое сукно. Поэтому его было куплено 150:(5-3)=75 аршин.

2. (5 баллов) Числа *a*, *b*, *c*, *d* удовлетворяют системе уравнений:

$$a+b+c=0$$
$$a+b+d=1$$
$$a+c+d=3$$
$$b+c+d=4$$

Чему равна разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел?

Ответ: 4.
Решение: Ответить на вопрос задачи можно даже не решая систему. Пусть сумма всех чисел равна S, тогда уравнения можно переписать так: S-d=0, S-c=1, S-b=3 и S-a=4. Отсюда d=S, c=S-1, b=S-3, a=S-4. Ясно, что d – наибольшее из этих чисел, а *a* – наименьшее. Их разность равна S-(S-4)=4.

3. (8 баллов) В прямоугольнике *ABCD* сторона *BC* в два раза больше стороны *AB*. На стороне *BC* выбрана точка *E* так, что угол *AEB* равен 30°. *F* - середина стороны *BC*. Найдите величину угла *FDE*.

Ответ: 30°.
Решение: $AE = 2AB = AD$. Так как $\angle EAD = 30°$, то $\angle ADE = \angle AED = 75°$, а $\angle FDE = 75°-45°=30°$

4. (8 баллов) В закрытом ящике лежат 100 носков четырех разных цветов. Известно, что если вытащить из ящика наугад любые 80 носков, то среди них обязательно найдутся носки всех цветов. Какое число носков нужно вытащить из ящика, чтобы среди вытащенных гарантированно нашлись носки хотя бы двух разных цветов?

Ответ: 38.
Решение: Носков каждого цвета не менее 21, потому что если бы был цвет с меньшим количеством, то всех остальных цветов было бы не менее 80, и значит, можно было бы вытащить 80 носков не более чем трёх цветов. Следовательно, носков каждого цвета не более 37 (при 38 одноцветных носках на остальные три цвета пришлось бы не более 62

носков, а значит, какого-то из этих цветов было бы не более 20). Поэтому достаточно вытащить из ящика 38 носков. (Нетрудно также построить пример, когда вытащить меньшее количество недостаточно: 21, 21, 21 и 37.)

5. (9 баллов) Решите числовой ребус 7*АЛЬКОВ=6*КОВАЛЬ (различные буквы обозначают различные цифры). В ответе напишите число АЛЬКОВ.

Ответ: 461538
Решение: В словах КОВАЛЬ и АЛЬКОВ переставляются целиком два трехзначных куска АЛЬ и КОВ. Обозначим их x и y. Тогда ребус можно переписать в виде $7(1000x+y)=6(1000y+x)$; $6994x=5993y$. После сокращения на 13 получаем уже несократимое равенство $538x = 461y$, откуда и получается, что $x=461$, а $y=538$.

6. (11 баллов) Имеются две банки емкостью 1 и 2 л. Из содержимого этих банок можно приготовить 0.5 л смеси, содержащей 40% яблочного сока, и 2.5 л смеси, содержащей 88% сока. Каково процентное содержание сока в банках?

Ответ: 40%; 100%
Решение: Ясно, что одна из банок содержит не более чем 40%-ную смесь. Также ясно, что в 2.5 л находится не менее чем 0.5 л более слабой смеси. Поэтому процент сока в этой смеси не может быть выше, чем (0.5*0.4+2*1)/2.5 * 100% = 88%. Так как по условию он ровно такой и есть, то мы понимаем, что в 2-литровой банке находится 100%-ный сок, а в 1-литровой – 40%-ный.

7. (12 баллов) D – произвольная точка на окружности, вписанной в равносторонний треугольник ABC со стороной 2. Найдите сумму квадратов расстояний от D до вершин треугольника.

Ответ: 5.
Решение: Используем метод координат. Пусть $A=(-1,0)$, $B=(1,0)$, тогда $C=(0,\sqrt{3})$. Вписанная в треугольник окружность имеет центр $O=(0, \sqrt{3}/3)$ и радиус $\sqrt{3}/3$; это означает, что координаты ее произвольной точки D удовлетворяют уравнению $x^2+(y-\sqrt{3}/3)^2 = 1/3$, или $x^2+y^2 = 2y\sqrt{3}/3$. Найдем теперь сумму квадратов расстояний от точки (x,y) до вершин треугольника: $DA^2+DB^2+DC^2 = (x+1)^2 + y^2 + (x-1)^2 + y^2 + x^2 + (y-\sqrt{3})^2 = 3x^2 + 3y^2-2\sqrt{3}y+5 = 5$ (мы использовали равенство $3x^2+3y^2 = 2y\sqrt{3}$, равносильное полученному выше уравнению окружности!).
Замечание. Эта задача – частный случай теоремы Лагранжа о моменте инерции системы материальных точек.

8. (12 баллов) Профессор математики собирается читать в университете курс своих лекций в течение последующих 20 лет. Чтобы украсить лекции, он хочет каждый год рассказывать по 4 анекдота. При этом в течение любых двух лет подряд повториться может только один анекдот, и каждый год должен быть рассказан хотя бы один анекдот, который не встречался на протяжении предыдущих четырех лет. Каким наименьшим числом анекдотов сможет обойтись профессор?

Ответ: 10.
Решение: За первые два года придется использовать не менее 7 анекдотов (поскольку повторяться может лишь один). В каждый из следующих трех лет понадобится по крайней мере, по одному новому анекдоту. Поэтому всего нужно, как минимум, 10 разных анекдотов. Дальше можно повторять 5-летний цикл анекдотов. Есть пример циклической последовательности четверок анекдотов (0, 1, 2, ... , 9), удовлетворяющей всем требованиям: 0125 2346 4017 1238 3409.

9. (14 баллов) У вас есть три отрезка, из которых нельзя составить треугольник, потому что один из них длиннее, чем сумма двух остальных. Вы укорачиваете его на сумму двух остальных, и таким образом снова получаете три отрезка. Если из них снова не получается составить треугольник, вы опять укорачиваете самый длинный из отрезков на сумму двух остальных. Так вы повторяете до тех пор, пока либо тройка отрезков не даст треугольник, либо один из отрезков не обнулится. Какое наибольшее число шагов может тянуться такой процесс?

Ответ: бесконечно много.
Решение: Пусть x – положительный корень уравнения x^3-x^2-x-1=0 (такой корень существует и больше 1, так как функция $f(x)$= x^3-x^2-x-1 при x=1 отрицательна, а при x=2 положительна). Если взять исходные отрезки равными x^3, x^2 и x, то первый будет длиннее суммы остальных, так как x^3=x^2+x+1 > x^2+x. После того, как его укоротят, он окажется равным 1, то есть тройка отрезков будет иметь длины x^2, x, 1. Эта тройка "подобна" исходной (все отрезки пропорциональны и в x раз меньше), поэтому при следующем укорачивании все отрезки снова уменьшатся в x раз. То же самое будет происходить при всех последующих укорачиваниях – процесс с этими отрезками никогда не завершится.

10. (16 баллов) Семья рыбаков - отец и сын - хочет переправить боевую группу на Тайный остров. У них есть одна двухместная лодка. Вначале дорогу до Тайного острова знает только рыбак-отец. Но дорога лежит мимо Сторожевой башни, и каждый может пройти мимо неё не более 5 раз (иначе поднимется тревога). Все остальные могут стать проводниками, запомнив дорогу на остров. Рыбаку-сыну для этого достаточно проплыть на остров всего один раз, а бойцу для запоминания нужно проплыть туда и обратно. В конце рыбаки должны быть дома, а все бойцы – на острове. Для какого наибольшего числа бойцов удастся организовать переправу? (Доказывать максимальность не нужно, просто приведите число бойцов, которое вы смогли переправить с соблюдением всех правил.)

Ответ: 6.
Решение: Используем такие обозначения: О – отец, С – сын, цифра от 1 до 6 – боец, $\rightarrow$ рейс на остров, $\leftarrow$ рейс обратно. План переправы:
О1$\rightarrow$, О1$\leftarrow$, ОС$\rightarrow$, О$\leftarrow$, 12$\rightarrow$, С2$\leftarrow$, С3$\rightarrow$, С$\leftarrow$, 24$\rightarrow$, 2$\leftarrow$, 25$\rightarrow$, 1$\leftarrow$, 16$\rightarrow$.
(Запомнили дорогу С, 1 и 2, О и С сделали по 4 рейса, 1 и 2 по 5.).