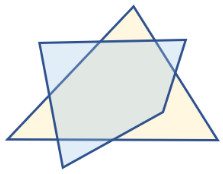
Жёлтый уровень

1. Какое наибольшее число сторон может иметь фигура, являющаяся общей частью треугольника и выпуклого четырехугольника? Приведите пример.

Ответ: 7.



Решение. Так как данные две фигуры — выпуклые, то их общая часть также выпуклая. Никакие две её стороны не могут лежать на одной прямой. Значит, любые две стороны общей части — куски разных сторон данных двух фигур. То есть, общая часть имеет не более 3 + 4 = 7 сторон. Пример показан на рисунке справа.

Указание по проверке: рассуждения, аналогичные решению без первого предложения (без указания на выпуклость), можно считать полным решением.

2. В бочке 22 кг мёда и N кг дёгтя. Если туда добавить 15 кг дёгтя, то его содержание в бочке повысится на 33%. Чему равно N?

Ответ: 3.

Решение. Пусть в начале в бочке было X% дегтя. Из условия следуют два соотношения: $N = (22 + N) \cdot X\% : 100\%$ и $N + 15 = (22 + 15 + N) \cdot (X + 33)\% : 100\%$. Из них следует, что $X = 12$, $N = 3$.

Указание по проверке. Если приведен только ответ и показано, что он подходит, то решение можно считать частично верным.

3. Выписали два делителя числа 160 000. Их сумма оказалась равной 1025. Чему равен больший из этих делителей? Найдите все варианты.

Ответ: 625 или 1000

Указание: подходят пары 1000 и 25, 625 и 400.

Решение. Заметим, $160\,000 = 2^8 \cdot 5^4$. Сумма 1025 нечётна, значит, один из делителей — степень числа 5. Достаточно перебрать варианты, когда один из делителей равен 5, 25, 125, 625 и убедиться, что подходят только два из этих вариантов.

Указание по проверке: если указан только один из двух вариантов, то решение не считать полным.

4. Найдите значение выражения $\left(\sqrt{12} + 5\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{578} - 3\sqrt{8}\right) \cdot \sqrt{6}$.

Ответ: 462.

Решение. $\left(\sqrt{12} + 5\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{578} - 3\sqrt{8}\right) \cdot \sqrt{6} = \left(2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}\right)\left(17\sqrt{2} - 6\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{6} = 7\sqrt{3} \cdot 11\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = 77 \cdot 6 = 462$.

Указание по проверке. Верный ответ без вычислений считать неверным решением.

5. Назовем натуральное число интересным, если для любого натурального $1 < k < 8$ либо оно само делится на k, либо в нем можно переставить цифры так, что получившееся число будет делиться на k. Найдите наименьшее интересное число.

Ответ 102.

Решение. Никакое двузначное число не подходит. Действительно, если в записи есть цифра 0, то число должно быть кратно НОК $(2, 3, 4, 5, 6, 7) = 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 > 100$, что невозможно. Иначе для делимости на 5 запись числа должна состоять из чётной цифры и цифры 5. Но числа 25, 45, 65, 85 не подходят: из 25, 65 и 85 не получишь кратное 3, из 45 не получишь кратное 7.

Число 100 и 101 не подходят — из них не получишь числа, кратные 3.

Число 102 подходит: 120 кратно 2, 3, 4, 5, 6, число 210 кратно 7.

Указание по проверке. В решении должно быть объяснение минимальности для числа 102 и объяснение, почему число 102 подходит. Одно из двух можно считать частично верным решением.

6. В прямоугольном треугольнике сумма сторон равна 70, сумма квадратов сторон равна 1682. Найдите квадрат разности катетов.

Ответ: 1.

Решение. Из условия $a + b + c = 70$, $a^2 + b^2 + c^2 = 1682$, $a^2 + b^2 = c^2$. Отсюда $c^2 = 841$, $c = 29$. Тогда $a + b = 41$, $a^2 + b^2 = 841$, откуда получаем $(a - b)^2 = 2(a^2 + b^2) - (a + b)^2 = 1$.

Указание по проверке. Верный пример треугольника с конкретными длинами сторон (без общих рассуждений) считать неверным решением.

7. В каждой клетке таблицы 7×7 записано натуральное число. В любом куске таблицы размером 1×3 или 3×1 сумма чисел равна 7. Может ли сумма всех чисел в таблице быть равной 120?

Ответ: не может.

Решение. В клетке таблицы не может стоять число более 5, иначе в любой части 1×3 с этой клеткой сумма чисел будет более чем 5 + 1 + 1 = 7. Таблицу 7×7 можно разбить на 16 кусков 1×3 и одну клетку. Значит, сумма чисел в таблице не более $16 \cdot 7 + 5 = 117$.

5	1	1	5	1	1	5
1	1	5	1	1	5	1
1	5	1	1	5	1	1
5	1	1	5	1	1	5
1	1	5	1	1	5	1
1	5	1	1	5	1	1
5	1	1	5	1	1	5

Замечание. Справа показано, как заполнить клетки числами, чтобы выполнялось условие, а сумма чисел при этом была равна 117.

Указание по проверке. Если в качестве решения предъявлен пример с суммой 117, но не доказано, что это наибольшая сумма, то решение можно считать частично верным.

8. На шахматной доске стоят несколько ладей. Петя хочет покрасить каждую ладью в один из *N* цветов так, чтобы никакие две одноцветные ладьи не били друг друга. При каком наименьшем значении *N* ему это удастся при любой расстановке ладей? Ладьи друг друга не бьют, если между ними находится еще одна ладья.

Ответ: 3.

Решение. Можно убедиться, что 5 ладей, расставленных как показано на рисунке справа, покрасить в 2 цвета с соблюдением условия задачи не удастся.

Л	Л	Л
Л		Л

При любой расстановке ладей их можно покрасить в 3 цвета, если красить их по строкам сверху вниз, а в каждой строке — слева направо: в этом случае каждую раскрашиваемую ладью будут бить не больше двух уже покрашенных.

Указание по проверке. В решении должно быть объяснение недостаточности 2 цветов и алгоритм для 3 цветов. Одно из двух можно считать частично верным решением.

9. За круглым столом сидит 100 человек, каждый из которых является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда врет. На вопрос «Является ли ваш сосед слева рыцарем?» ответ «да» дали 28 человек. Какое наибольшее количество лжецов могло быть за столом?

Ответ: 64.

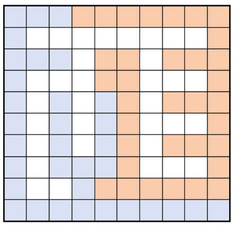
Решение. Ответ «да» дают рыцарь про рыцаря или лжец про лжеца. Если за столом сидят рядом два рыцаря или два лжеца, то выгоним из-за стола одного из них. После этого ответы на вопрос не изменятся, но на один ответ «да» станет меньше. После того, как выгоним 28 человек, останутся ответы «нет», значит, среди оставшихся 100 – 28 = 72 человек половина — рыцари, половина — лжецы. Значит, лжецов не более 72 : 2 + 28 = 36 + 28 = 64.

Такое возможно. Посадим за стол 36 рыцарей и 36 лжецов, чтобы они чередовались. Затем между двух рядом сидящих посадим 28 лжецов. В итоге «да» ответят только 28 лжецов.

Указания по проверке: только верный пример расположения 64 лжецов и 36 рыцарей считать частично верным решением.

10. Лёня разрезал клетчатый квадрат 10×10 по границам клеток на 3 части, сосчитал периметр каждой части. Все периметры оказались равны числу *N*. Найдите наибольшее возможное значение *N*?

Ответ: 68.



Решение. Меньшая (по площади) из частей содержит не более [100 : 3] = 33 клеток. Будем составлять эту часть, присоединяя к одной клетке остальные по очереди. При каждом присоединении периметр увеличивается не более чем на 2. Значит, периметр этой фигуры не более $4 + 32 \cdot 2 = 68$.

На рисунке справа показан один из примеров, когда периметр каждой фигуры равен 68.

Указание по проверке: только пример (без объяснения максимальности) или объяснение максимальности (без примера) считать частично верным решением.