MathCat зеленый.

1. (5) Есть куб 3×3×3, состоящий из кубиков 1×1×1 (выглядит как кубик Рубика). Из него вынули все кубики, которые не примыкают к ребрам самого куба 3×3×3. Сколько кубиков осталось?
Ответ: 20.
Решение. Было 27 кубиков, вынули центральные кубики из каждой грани (6 штук) и кубик, находившийся в центре куба (1). Итого осталось 27–6–1=20.

2. (5) Чему равно значение выражения:

$$1 - (2 - (3 - (4 - (5 - (6 - (7 - (8 - (9 - (10 - 11)))))))))?$$

Ответ: 6.
Решение. Несложно понять, что это выражение равно 1–2+3–4+5–6+7–8+9–10+11. Если расставить скобки 1+ (–2+3)+(–4+5)+(–6+7)+(–8+9)+(–10+11), то увидим шесть слагаемых, каждое из которых равно 1.
Комментарий. Впрочем, сосчитать ответ в этой задаче можно как угодно. Главное не ошибиться.

3. (7) Чему равна сумма цифр числа $10^{2015} - 2015$?
Ответ: 18128.
Решение: Число $10^{2015} - 1$ состоит из 2015 девяток. После вычитания ещё 2014 остаются 2011 девяток, за которыми следуют цифры 7985, поэтому сумма цифр равна 9·2011+29=18128.

4. (8) Футбольный клуб провёл четыре матча, в которых пропустил пять мячей. При этом все его матчи закончились с разным счётом (выигрыш 3:2 и проигрыш 2:3 – это разный счёт). Какое наименьшее число мячей клуб мог забить?
Ответ: 1.
Решение. Если бы клуб не забил ни одного мяча, то смог бы сыграть не более одной игры вничью (0:0), а три остальных должен был проиграть с разным счётом, то есть пропустить не менее 1 гола в одной игре, не менее двух мячей – в другой и не менее трёх – в третьей. Итого получается 6 пропущенных мячей, а это противоречит условию. Следовательно, хотя бы один забитый мяч должен быть. Пример с одним забитым мячом: 1:0, 0:3, 0:2, 0:0.
Комментарий. Сложной частью решения является доказательство того, что хотя бы один гол должен быть забит. Без него засчитывать задачу нельзя.

5. (10) У трехзначного числа переставили две последние цифры и сложили полученное число с исходным. Получилось четырехзначное число, начинающееся на 173. Какой может быть последняя цифра полученного числа? (Укажите все варианты)
Ответ: 2.
Решение. Ясно, что в разряде сотен у числа была цифра 8, потому что эта цифра осталась на своём месте, а при сложении получилось 17. Пусть остальными цифрами были b и c (в таком порядке). Тогда число было равно $800+10b+c$. После перестановки цифр получилось $800+10c+b$, а после сложения – $1600+11b+11c$. Таким образом, $11b+11c = 130+x$, где x – последняя цифра. Между 130 и 139 есть только одно число, которое делится на 11 – это число 132. Для него последняя цифра равна 2.
Комментарий: ответ с примером (например, 866+866=1732) полезен, но недостаточен, поскольку в задаче явно требуется обосновать, что других вариантов нет.

6. (10) Будем называть дату «особенной», если она записывается цифрами без повторений. Например, такой датой было 8 сентября 2015 года: 8.9.2015. А когда будет последняя «особенная» дата в этом веке?
Ответ: 31.7.2098.
Решение. 2098 – последний год столетия с несовпадающими цифрами (2099 и 2100 не годятся). В этом году не годятся 12-й (двойка уже использована), 11-й (две единицы), 10-й (0 уже использован), 9-й и 8-й (9 и 8 использованы) месяцы. Следовательно, последним возможным месяцем для особенной даты является июль (7). Ну а 31 – последний день июля.

7. (10) В каждую клеточку квадрата 3×3 вписано какое-то натуральное число. Произведение чисел в верхней строчке равно 20, в средней – 24, в нижней – 30. Чему равно наименьшее возможное произведение чисел в среднем столбике, если произведения в левом и правом столбиках одинаковы?

Ответ: 1.

Решение: так как произведение натуральных чисел не может быть меньше 1, то в этой задаче достаточно привести пример:

```
4 1 5        2 1 10       1 1 20
6 1 4  или   6 1 4  или   4 1 6
5 1 6       10 1 6       30 1 1
```

Возможны и другие примеры.

Комментарий: тем не менее, покажем, как можно такие примеры получить. Произведение всех чисел в таблице равно $20\cdot24\cdot30=14400=120^2$. Так как мы хотим сделать произведение в среднем столбике как можно меньшим, то произведения в крайних столбиках должны быть как можно большими. Ясно, что они не могут быть больше 120, поэтому нужно постараться сделать такие произведения равными 120. Разложить 20 и 24 на пары множителей можно очень многими способами, нас устроит любой способ, в котором после перемножения множителей из разных пар получатся делители числа 120.

8. (12) Расстояние между Томом и Джерри составляет 200 метров. За 10 секунд Том пробегает 10 метров, а Джерри – 8. На каком расстоянии они могут оказаться через 100 секунд (найдите все возможные ответы)?

Ответ: 20, 180, 220 или 380 м.

Решение. 100 секунд = 10 раз по 10 секунд. За каждые 10 секунд либо Том приближается к Джерри на 2 метра (если догоняет его), либо отдаляется от него на 2 метра (если убегает от него), либо они сближаются на 18 метров (если бегут навстречу), либо удаляются на 18 метров (если разбегаются в разные стороны). Следовательно, за 100 секунд расстояние изменится на 20 или 180 метров и, соответственно, составит 200–20=180, 200+20=220, 200–180=20 или 200+180=380 метров.

9. (15) Какое наименьшее количество двузначных чисел нужно взять, чтобы среди них заведомо нашлось число, которое делится или на 2, или на 5?

Ответ: 37.

Решение. В задаче спрашивается про наименьшее количество, поэтому нам нужно будет доказать утверждение задачи для нашего ответа и опровергнуть это утверждение для 36 чисел. Контрпример для 36 чисел строится так: из каждого десятка выберем 4 числа, заканчивающиеся на 1, 3, 7 и 9. Ясно, что при этом не найдётся чисел, делящихся ни на 2, ни на 5.

Пусть взято 37 чисел. Все они не меньше 10 и не больше 99, так что принадлежат девяти разным десяткам. Так как $37/9 > 4$, то [по принципу Дирихле, хотя можно его и не упоминать] из какого-то десятка взято больше четырёх (то есть не менее пяти) чисел. Если среди них нет ни одного чётного (то есть такого, которое заканчивается на 0, 2, 4, 6 или 8), то выбраны все остальные, то есть заканчивающиеся на 1, 3, 5, 7 и 9. Но тогда число, заканчивающееся на 5, делится на 5.

10. (18) Однажды несколько друзей обменивались рукопожатиями. В какой-то момент оказалось, что среди любых четырех из них имеется хотя бы один, который успел пожать руки трем другим. Сколько могло оказаться среди них человек, не успевших пожать руки всем остальным? (Укажите все варианты).

Ответ: 0, 2 или 3.

Решение. Назовём всех, кто не успел пожать руки всем остальным, *недопожатыми*. Заметим, что все недопожатые (если они есть) не успели пожать руки только другим недопожатым. Предположим, что нашлись хотя бы 4 недопожатых человека A, B, C и D, причем какие-то два из них (A и B) не пожимали руки друг другу. По условию, среди этой четверки есть тот, кто пожал руки всем троим. Пусть это C. Так как он входит в список недопожатых, то для него есть такой человек E, которому он не пожимал руки. Тогда для четвёрки A, B, C и E не выполняется условие: A не пожимал руки B, а C – E. Следовательно, четырёх недопожатых быть не могло. Одного быть тоже не могло, так как даже без одного сделанного рукопожатия получаем сразу двоих недопожатых. Двое или трое, очевидно могли быть (примеры легко строятся).

Комментарий: в этой задаче рассуждение, показывающее невозможность ответов «4 и более», намного более трудное, чем просто поиск возможных ответов. Без его наличия решение задачи засчитывать не нужно.