Красный уровень

1. (6 баллов) Сколько различных значений x, $-10 < x < 10$, удовлетворяют уравнению $\cos^2 x + 2\sin^2 x = 1$?

(Ответ: 7.)

Решение. Так как $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, то уравнение равносильно $\sin^2 x = 0$. Решениями являются числа, кратные π. Так как $3\pi<10<4\pi$ и $-4\pi<-10<-3\pi$, то двойному неравенству удовлетворяют числа -3π, -2π, …, 3π - всего 7 чисел.

2. (6 баллов) Средний набор из 3 гамбургеров, 5 молочных коктейлей и 1 упаковки картошки фри в “Макдональдсе” стоят 235 рублей, а большой набор из 5 гамбургеров, 9 молочных коктейлей и 1 картошки фри стоит 395 рублей. Сколько стоит там же малый набор из 2 гамбургеров, 2 молочных коктейлей и 2 упаковок картошки фри, если считать все цены установленными правильно и без скидок?

(Ответ: 150 рублей.)

Решение. Пусть Г - цена гамбургера, М - цена коктейля, а К - цена упаковки картошки. Из равенств 3Г+5М+К=235 и 5Г+9М+К=395 получаем, что Г+М+К=2(3Г+5М+К)-(5Г+9М+К)= 470-395=75, поэтому 2(Г+М+К)=150.

3. (8 баллов) Алик, Боря и Вася решили вместе 100 задач, при этом каждый из них решил ровно 60 задач. Задачу, которую решили все трое, назовем легкой, а задачу, которую решил только один из ребят, – трудной (при этом каждая задача решена как минимум одним мальчиком). Что больше и на сколько - количество легких задач или количество трудных?

(Ответ: трудных задач на 20 больше.)

Решение. Пусть X - число легких задач, Z - число трудных, а Y - число задач, решенных двумя участниками. Тогда $X+Y+Z=100$, а $3X+2Y+Z=3*60$ (это равенство выражает уравнение для суммы 60 задач, решенных каждым из троих). Поэтому $Z-X=2(X+Y+Z)-3X-2Y-Z = 200-180=20$.

4. (8 баллов) Четырехугольник MOST может быть вписан в окружность. Известно, что $\angle OMT=20°$, а $\angle MTS=100°$. Найдите в градусах величину угла между продолжениями сторон MT и OS.

(Ответ: 80.)

Решение. Если четырёхугольник может быть вписан в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°, отсюда можем вычислить оставшиеся два угла четырёхугольника: $\angle MOS = 80°$, $\angle OST=160°$. Тогда продолжения сторон MT и OS будут образовывать треугольник STP. В нём углы S и T считаются внешними для четырёхугольника и будут равны 180° минус внутренний угол четырёхугольника, то есть $\angle STP=180° - \angle MTS=80°$, $\angle TSP=180°-\angle OST=20°$. Третий угол треугольника тогда равен $SPT=180°-\angle PST-\angle PTS=180°-20°-80°=80°$.

5. (10 баллов) У Вани есть три прямоугольных параллелепипеда, объём каждого из которых равен 128. Площади двух граней первого равны 4 и 32, площади двух граней второго - 16 и 64, а третьего - 8 и 32. Какую наибольшую высоту может иметь башня, построенная из этих параллелепипедов?

(Ответ: 56.)

Решение. Прямое вычисление позволяет найти все размеры - это 1x4x32, 2x8x8 и 2x4x16. Наибольшая высота башни равна сумме трёх наибольших измерений, то есть 32+16+8=56.

6. (10 баллов) Числа A, BC, DD и AAE (каждая буква заменяет цифру, одной букве соответствует только одна цифра, одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры) образуют возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите цифру C.

(Ответ: 9.)

Решение. A=1, поэтому AAE=112, 115 или 118 (число AAE-1 должно быть кратно трём). Разность прогрессии при этом равна 37, 38 и 39 соответственно. Только второй вариант даёт для третьего члена прогрессии число с одинаковыми цифрами (1+2*38=77). При этом BC=1+38=39, поэтому C=9.

7. (10 баллов). Каждая станция детской железной дороги продаёт билеты до всех остальных станций, все эти билеты различны, на каждом указано название начальной и конечной станции. После того, как на этой дороге построили несколько (более одной) новых станций, пришлось допечатать 46 новых видов билетов. Сколько всего станций теперь действует на детской железной дороге?

(Ответ: 13.)

Решение. Если было x станций, а стало y, то теперь нужно y(y-1) билетов, а раньше было нужно x(x-1). По условию y(y-1)-x(x-1)=46, то есть (y-x)(y+x-1)=46. Отсюда y-x=2 и x+y=24. Соответственно, y=13 и x=11.

8. (12 баллов) Три корня многочлена f(x) = x^4+ax^2+bx+c равны 2, 3, и 5. Найдите f(1).

(Ответ: -88.)

Решение. Так как имеются три корня, то есть и четвёртый. Сумма всех четырёх корней равна коэффициенту при x^3, взятому со знаком минус, то есть равна 0. Поэтому четвёртый корень равен -10. Следовательно, f(x)= (x−2)(x-3)(x−5)(x+10), и f(1)=(-1)·(-2)·(-4)·11=-88.

9. (15 баллов) Для любых двух положительных чисел x и y обозначим через x ◊ y положительное число, определённое в зависимости от x и y по некоторому правилу. Известно, что операция ◊ удовлетворяет свойствам (x·y)◊y = x(y◊y) и (x◊1)◊x = x◊1 для всех x, y > 0, а 1◊1 = 1. Чему равно 20◊17?

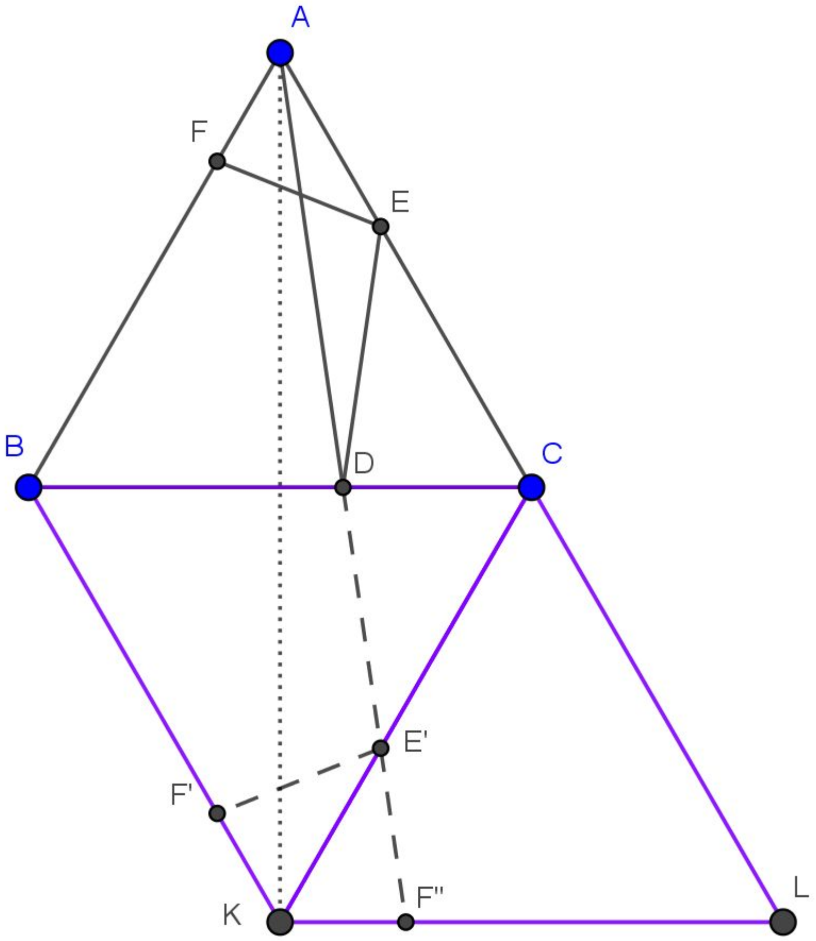
(Ответ: 20.)

Решение. Докажем, что x◊y=x. Во-первых, это верно для y=1: x◊1=(x·1)◊1=x(1◊1)=x·1=x. Во-вторых, это верно для y=x: x◊x=(x·1)◊x=x◊1 =x по доказанному выше. Таким образом, по условию (x·y)◊y = x(y◊y)=xy, то есть результат такой операции равен первому “множителю”. Подставив xy=20 и y=17, мы немедленно получаем, что 20◊17=20.

10. (15 баллов) Ваня играет в бильярд на столе, имеющем форму правильного треугольника ABC со стороной 40 см. Он отправляет шар от вершины A так, что после двух отражений от стенок BC и CA шар оказался около стороны AB в 10 см от вершины A. Какова длина пути, пройденного шаром к этому моменту?

(Ответ: 70 см.)

Решение.



Траектория шара - ломаная ADEF. Отразим треугольник ABC вместе с соответствующими частями траектории сначала относительно BC (получим треугольник KBC), а потом относительно стороны KC (получим треугольник KLC). Так как при отражении шара от стенок бильярда угол падения равен углу отражения, то в результате двух отражений ломаная “распрямится” в отрезок AF’’. Осталось найти его длину. Так как KF’’=KF’=AF=10 и AK=$40\sqrt{3}$, то по теореме Пифагора $AF''^2 = 100+4800 = 4900$, откуда AF’’=70.