Жёлтый уровень

1. (5 баллов) Периметр квадрата увеличили на 5%. На сколько процентов увеличилась его площадь?

(Ответ: 10,25%.)

Решение. Пусть a — длина стороны квадрата. После увеличения она стала равной $1{,}05*a$. Значит, площадь увеличилась с a^2 до $(1{,}05*a)^2 = 1{,}1025 \times a^2$, то есть стала больше на 10,25%.

2. (5 баллов) Каждый из шести игроков команды решал 9 задач. После 2 часов оказалось, что каждый решил по две задачи. Задача считается решённой тогда, когда её решили трое игроков. Каково может быть наименьшее количество нерешённых командой задач?

(Ответ: 5.)

Решение. Всего игроками решены 6х2=12 задач, причём каждая трижды. Следовательно, решены 4 различных задачи, а 5 - не решены.

3. (6 баллов) Из книги, страницы которой пронумерованы стандартным образом, выпал кусок из нескольких листов. На первом листе выпавшего куска есть страница № 12, у последнего листа есть страница № 67. Сколько листов выпало?

(Ответ: 29.)

Решение. Так как в книге лист начинается страницей с нечётным номером, а заканчивается страницей с чётным, то в выпавшем куске будут располагаться страницы 11-68. Количество листов тогда $(68-11+1)/2=29$.

4. (8 баллов) Решите систему уравнений $a^2+2b=-1$; $b^2-2a=-1$.

(Ответ: $a=1$, $b=-1$.)

Решение. Сложим оба равенства. Тогда получим $a^2+b^2+2b-2a+2=0$, $(a-1)^2+(b+1)^2=0$. Отсюда сразу получаем, что $a=1$, $b=-1$.

5. (10 баллов) Дед Мороз в каждый подарок клал по 13 конфет, и у него оставалось количество конфет, недостаточное для ещё одного подарка. Когда он стал в каждый подарок класть по 15 конфет вместо 13-ти, то имеющихся у него конфет хватило на такое же количество подарков. Какое наибольшее количество конфет могло быть у Деда Мороза?

(Ответ: 90.)

Решение. Если конфет хватает на n подарков, то у Деда Мороза есть по крайней мере $15*n$ конфет, но точно нет $13*(n+1)$ конфет, потому что иначе бы при раскладке по 13 хватило бы на 1 подарок больше. Следовательно, $13*n+13>15*n$, откуда легко находим, что $n<6.5$. Максимально возможное такое n равно 6, поэтому конфет не более 90. Несложно проверить, что 90 конфет может быть.

6. (12 баллов) В компьютерной игре за прохождение каждого уровня можно заработать 8, 9 или 19 очков (в зависимости от того, насколько удачно пройден уровень). Чему равно наибольшее натуральное количество очков, которое невозможно заработать в этой игре?

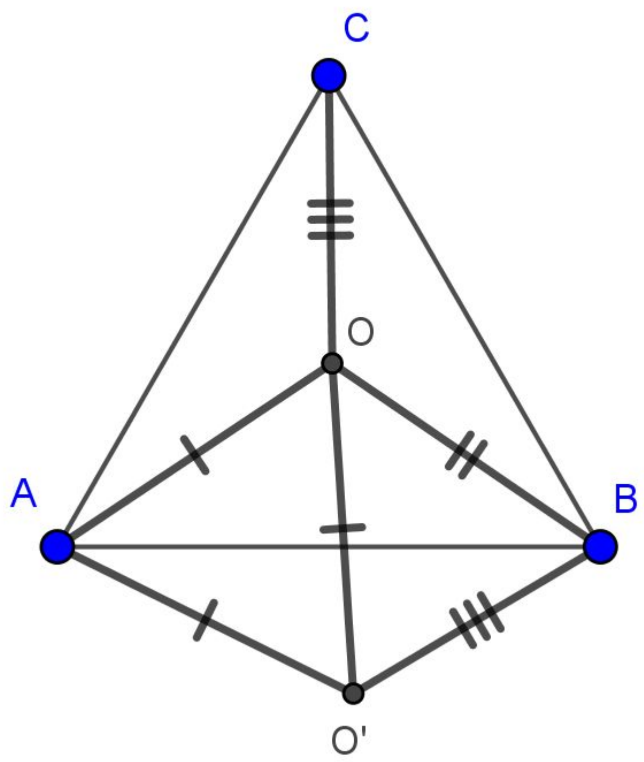
(Ответ: 39.)

Решение. Возьмём, например, число $n*8$, где n - некоторое натуральное число. Представим последующие числа: $(n-1)*8+9$, $(n-2)*8+9*2$, $(n-2)*8+19$, $(n-3)*8+19+9$, $(n-4)*8+19+9*2$, $(n-4)*8+19*2$. Восьмое число с помощью такого подхода составить не получается, поэтому очевидно, что ответ имеет формулу $n*8+7$ ($n\geq 4$). В то же время при n=4 число 39 с помощью нескольких слагаемых, равных 8, 9 или 19, получить невозможно, а вот число 45 (n=5) можно представить в виде 45=9*5. Все последующие числа получаются прибавлением 8 к ранее полученным.

7. (12 баллов) Внутри равностороннего треугольника ABC взята точка O. Известно, что ∠AOB=112°, ∠BOC=123° и ∠COA=125°. Найдите величины углов треугольника со сторонами AO, BO и CO.

(Ответ: 63°, 65°, 52°.)

Решение.



Повернём часть рисунка вокруг вершины A на 60°. При этом C перейдёт в B, а точка O перейдёт в новую точку O'. Поэтому отрезок OC перейдёт в O'B. Так как точки O, O' и A образуют правильный треугольник, то OO'=OA. Таким образом, стороны треугольника OBO' равны OA, OB и OC. Однако из рисунка легко найти угол O'OB=AOB-60°=52°. Совершенно аналогично (с помощью других поворотов) находятся и два остальных угла - 125°-60°=65° и 123°-60°=63°.

8. (12 баллов) Петя ищет клетчатые прямоугольники, в которых диагональ пересекает ровно 23 клетки. Он уже нашел прямоугольники 1 × 23 и 23 × 23. Сколько еще таких прямоугольников он может найти (прямоугольники a x b и b x a считаем одинаковыми)?

(Ответ: Три - 5 x 19, 7 x 17 или 11 x 13.)

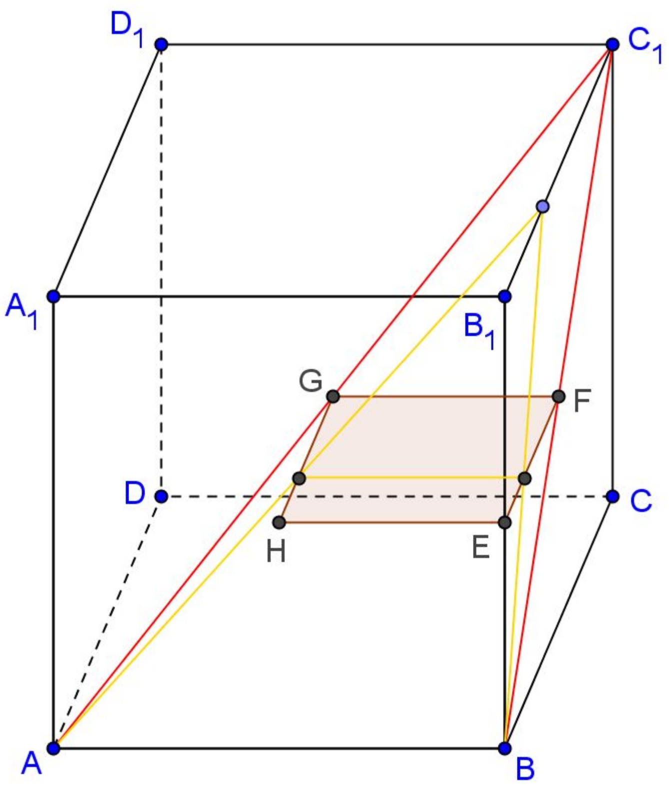
Решение. Диагональ прямоугольника размером a x b пересекает все a-1 горизонтальных линий и b-1 вертикальных. Если числа a и b не имеют общих делителей, то все эти линии пересекаются в различных точках, и тогда на диагонали имеется (a-1)+(b-1) точек пересечения, то есть она разделена на a+b-1 отрезок, то есть пересекает a+b-1 клетку. Это сразу даёт уравнение a+b-1=23, a+b=24 при условии отсутствия общих делителей. Чтобы a и b, сумма которых равна 24, не имели общих делителей, каждое слагаемое должно быть нечетным и не делящимся на 3. Это бывает при парах (1,23), (5,19) и (7,17). Если же у a и b есть общие делители, то некоторые точки пересечения диагонали с горизонталями и вертикалями окажутся совпавшими, и количество таких точек будет равно НОД(a,b). Рассуждая аналогично основному случаю, получим, что такая диагональ пересечёт a+b-НОД(a,b) клеток. Равенство a+b-НОД(a,b)=23 при НОД(a,b)>1 возможно, только если НОД(a,b)=23, потому что левая часть делится на НОД(a,b). Для этого случая имеем a=23a', b=23b', a+b=68, a'+b'=2, откуда a'=b'=1. Таким образом, здесь добавляется только вариант a=b=23, уже найденный Петей.

9. (15 баллов) Дан куб ABCDA1B1C1D1 с ребром 8. Провели всевозможные отрезки, у каждого из которых один конец на ребре AB, а другой - на ребре CC1. Середины этих отрезков образуют плоскую фигуру. Какова её площадь?

(Ответ: 16.)

Указание: эта фигура - квадрат, сторона которого равна половине ребра куба.

Решение. Если один конец отрезка в точке C1, а другой пробегает отрезок AB, то середина перемещается по средней линии треугольника ABC1, то есть двигается по отрезку GF. Если C1 перемещается по ребру B1C1, то средняя линия перемещается от положения отрезка GF до отрезка HE.Таким образом, середины отрезков замощают квадрат EFGH.



10.(15 баллов) Перечислите дроби вида 1/A и 1/B, где A и B - натуральные числа, разность между которыми равна 4/221.

(Ответ: 1/13 и 1/17, 1/51 и 1/663, 1/52 и 1/884, 1/55 и 1/12155.)

Решение.

$1/a - 1/b = 4/221$

$221(b-a)=4ab$

$(221-4a)(221+4b)=221^2=13^2*17^2$

Итак, требуется разложить 221^2 на два множителя - меньший будет $221-4a$, больший - $221+4b$. Меньший множитель может быть равен 1, 13, 17 или 13^2. Это даёт варианты $221-4a=1$, $221-4a=13$, $221-4a=17$ и $221-4a=169$, то есть $a=55$, $a=52$, $a=51$, $a=13$. Соответственно получаем $221+4b=48841$, $221+4b=3757$, $221+4b=2873$, $221+4b=289$, то есть $b=12155$, $b=884$, $b=663$, $b=17$.