



Зелёный уровень

1. (5 баллов) В строчку выписаны первые три члена арифметической прогрессии. Одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, разные – разными. Получилось $A \ BC$ AAA . Какая цифра обозначена буквой C ?

(Ответ: 6.)

Решение. Единственная возможность для числа AAA - это 111. Значит, $A=1$, $BC=(1+111)/2 = 56$.

2. (6 баллов) Профессор Нуликов отправился из Москвы на конференцию в Торонто. Его самолёт вылетает из Москвы в 18:35, а в Торонто прибывает в 10:20 следующего дня (время отправления и прибытия местное). Сколько времени профессор будет находиться в полете, если 2 часа ночи в Москве – это 7 часов предыдущего вечера в Торонто?

(Ответ: 22ч 45м.)

Решение. Разница во времени между Торонто и Москвой равна $2+24-19=7$ часам. Следовательно, полёт профессора по времени Торонто начался в 11:35. Поэтому его продолжительность на 1 час 15 минут меньше суток, то есть равна 22 ч 45 м.

3. (6 баллов) Шесть игроков команды решали 9 задач. После 2 часов оказалось, что каждый решил 2 задачи, а если задача решена, то её решили трое игроков. Сколько задач команда не решила?

(Ответ: 5.)

Решение. Всего игроками решены $6 \times 2 = 12$ задач, причём, каждая трижды. Следовательно, решены 4 различных задачи, а 5 - не решены.

4. (8 баллов) В арифметической прогрессии с разностью равной 6 пять последовательных членов являются простыми числами (т.е. делятся только на 1 и на себя). Чему может быть равен наименьший член этой прогрессии?

(Ответ: 5.)

Решение. Один из членов такой прогрессии обязательно делится на 5, поэтому простым он может быть, только если равен 5.

5. (10 баллов) На бирже в Нью-Васюках ежедневно в 10:00 открываются торги. Рано утром 1 января N -го года стоимость одной акции фирм «Вася Inc.» и «Петя и Ко» была один и два рубля соответственно. 31 декабря того же года после окончания торгов цены снова стали теми же. Лёша установил, что цены на акции этих фирм всегда были различны между собой, каждый день менялись, но все время были либо один, либо два рубля. Сколько дней было в феврале этого года?

(Ответ: 29.)

Решение. Если 1 января утром акция стоит 1 рубль, то после закрытия торгов её цена станет 2 рубля, тогда 2-го января цена акции после закрытия торгов - 1 рубль, а 3-го - опять два. Получаем, что 2 рубля акция будет стоить каждый нечётный день года после закрытия торгов. Тогда 31 декабря должно быть 366-м днём. То есть год високосный.

6. (10 баллов) В комнате сидели 37 жителей острова рыцарей и лжецов. В какой-то момент один человек обиделся и ушел. Один из оставшихся, поглядев ему вслед, заметил: «Ушедший – лжец!» После чего встал и тоже вышел. Второй сказал: «Оба

ушедшие – лжецы» и тоже ушел. Далее каждый из оставшихся уходил, говоря: «Все ушедшие – лжецы». Пока последний оставшийся в комнате печально не констатировал: «Да, все ушедшие – лжецы». Определите, сколько в комнате было лжецов первоначально. (Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду)

(Ответ: 36.)

Решение. Если хоть кто-то сказал правду, то все перед ним были лжецами, а он сам - рыцарем. Следовательно, все оставшиеся после него (если он не последний) тоже лжецы. В этом случае точно есть 1 рыцарь и 36 лжецов. А если никто не сказал правду, то самый первый ушедший не был лжецом, тогда он рыцарь, а все остальные солгали, и в этом случае снова 36 лжецов.

7. (10 баллов) Средний набор из 3 гамбургеров, 5 молочных коктейлей и 1 упаковки картошки фри в “Мақдональдсе” стоят 235 рублей, а большой набор из 5 гамбургеров, 9 молочных коктейлей и 1 картошки фри стоит 395 рублей. Сколько стоит там же малый набор из 2 гамбургеров, 2 молочных коктейлей и 2 упаковок картошки фри, если считать все цены установленными правильно и без скидок?

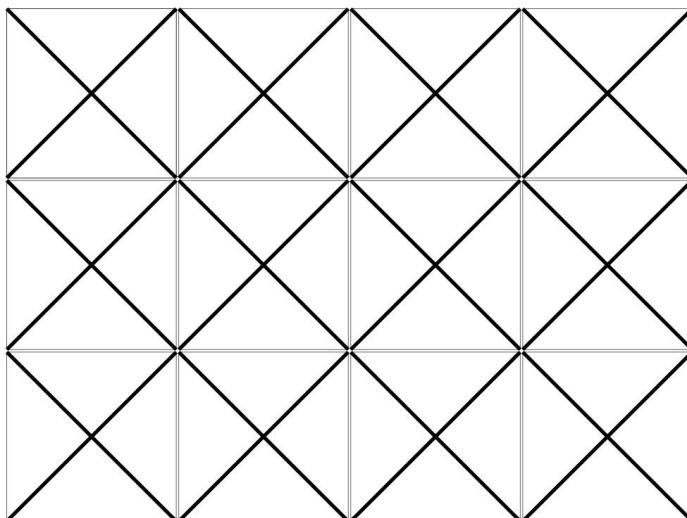
(Ответ: 150 рублей.)

Решение. Пусть Г - цена гамбургера, М - цена коктейля, а К - цена упаковки картошки. Из равенств $3Г+5М+К=235$ и $5Г+9М+К=395$ получаем, что $Г+М+К=2(3Г+5М+К)-(5Г+9М+К)=470-395=75$, поэтому $2(Г+М+К)=150$.

8. (13 баллов) Маша написала на доске четыре натуральных последовательных числа. Лёша разделил каждое из них на 10 и стёр цифры после запятой. Оказалось, что теперь сумма написанных на доске чисел равна 2017. Какие числа написала Маша изначально?

(Ответ: 5047, 5048, 5049, 5050.)

Решение. Так как остаток от деления 2017 на 4 равен 1, то получим в итоге три одинаковых числа и одно на единицу большее их. Соответственно, тогда это будут числа $(2017-1)/4$ и $(2017-1)/4+1$, то есть 504 и 505. Тогда исходные числа - 5050 и 5049, 5048, 5047.



9. (15 баллов) У Винни-Пуха был прямоугольник размером 3x4 клетки. Он сложил его несколько раз по линиям сетки и в итоге получил квадратик 1x1. Затем полученный квадратный сверток Винни-Пух разрезал по обеим диагоналям. На сколько частей при этом распался исходный прямоугольник?

(Ответ: 31.)

Решение. Количество частей в точности равно количеству сторон сетки длиной в одну клетку, а всего есть 16 таких горизонтальных

сторон и 15 вертикальных. Можно изобразить на рисунке. Жирными линиями выделены разрезы.

10. (17 баллов) Петя ищет клетчатые прямоугольники, в которых диагональ пересекает ровно 17 клеток. Он уже нашел прямоугольники 1×17 и 17×17 . Сколько еще таких прямоугольников он может найти (прямоугольники $a \times b$ и $b \times a$ считаем одинаковыми)?

(Ответ: Два - 5×13 или 7×11 .)

Решение. Диагональ прямоугольника размером $a \times b$ пересекает все $a-1$ горизонтальных линий и $b-1$ вертикальных. Если числа a и b не имеют общих делителей, то все эти линии пересекаются в различных точках, и тогда на диагонали имеется $(a-1)+(b-1)$ точек пересечения, то есть она разделена на $a+b-1$ отрезок, то есть пересекает $a+b-1$ клетку. Это сразу даёт уравнение $a+b-1=17$, $a+b=18$ при условии отсутствия общих делителей. Чтобы a и b , сумма которых равна 18, не имели общих делителей, каждое слагаемое должно быть нечетным и не делящимся на 3. Это бывает при парах $(1,17)$, $(5,13)$ и $(7,11)$. Если же у a и b есть общие делители, то некоторые точки пересечения диагонали с горизонталями и вертикалями окажутся совпавшими, и количество таких точек будет равно $\text{НОД}(a,b)$. Рассуждая аналогично основному случаю, получим, что такая диагональ пересечёт $a+b-\text{НОД}(a,b)$ клеток. Равенство $a+b-\text{НОД}(a,b)=17$ при $\text{НОД}(a,b)>1$ возможно, только если $\text{НОД}(a,b)=17$, потому что левая часть делится на $\text{НОД}(a,b)$. Для этого случая имеем $a=17a'$, $b=17b'$, $a+b=34$, $a'+b'=2$, откуда $a'=b'=1$. Таким образом, здесь добавляется только вариант $a=b=17$, уже найденный Петей.

