



Решения заданий зелёного уровня

1. (5 баллов) В 2016 году 26 ноября – это суббота. В каком ближайшем году 26 ноября будет средой?

Решение. В невисокосные года день недели перемещается на один вперёд с каждым последующим годом, в високосные – на два. Так как 2016 год был високосным, то к 2019 году 26 ноября сместится на вторник, а в 2020 – на четверг, то есть среда окажется пропущенной. До следующей среды пройдет еще 5 лет (смещение на $1+1+1+2+1=6$), таким образом, 26 ноября выпадет на среду только в 2025 году.

Ответ. В 2025 году.

2. (5 баллов) Вася положил в банк 10000 рублей под 20% годовых. В конце каждого года банк снимает со счёта Васи 1000 рублей за обслуживание. Какая сумма будет на счету Васи через 4 года (при необходимости округлите ответ до целого числа рублей)?

Решение. Сосчитаем капитал Васи последовательно через 1 год, 2 года, 3 года и 4 года:

1 год: $10000 \times 1.2 - 1000 = 11000$. 2 года: $11000 \times 1.2 - 1000 = 12200$

3 года: $12200 \times 1.2 - 1000 = 13640$ 4 года: $13640 \times 1.2 - 1000 = 15368$.

Ответ. 15368 рублей.

3. (8 баллов) В словах МАТ и КЭТ разные буквы обозначают разные цифры, а одинаковые – одинаковые. Какое наибольшее значение может принимать сумма МАТ+КЭТ?

Решение. Сумма принимает наибольшее значение, когда в разряде сотен (М и К) стоят самые большие цифры – 9 и 8. Аналогично, следующие по величине цифры (7 и 6) должны оказаться в разряде десятков, а самая большая из оставшихся (5) – в разряде единиц. Таким образом, максимально возможная сумма равна $975+865$.

Ответ. 1840.

4. (10 баллов) Каждый из 10 человек либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда врёт). Каждый из них заявил: «Среди остальных 9 человек - ровно 5 рыцарей». Сколько лжецов могло быть среди этих 10 человек? Укажите через запятую все возможные ответы.

Решение. Если среди них есть хотя бы один рыцарь, то сказанное им – правда, то есть среди остальных – ещё 5 рыцарей. Остальные четверо – лжецы, и они тоже могут сказать, что среди остальных девяти людей пять рыцарей, потому что на самом деле это не так (их шесть). Таким образом, один из возможных вариантов – 6 рыцарей и 4 лжеца.

Если же среди 10 человек нет ни одного рыцаря, то все они лжецы, и тоже вполне могли сказать, что среди остальных 9 человек есть сколько-то рыцарей, потому что на самом деле их нет. Поэтому другой возможный вариант – 0 рыцарей и 10 лжецов.

Ответ. 4, 10.

5. (10 баллов) У Васи в кармане лежит 8 леденцов с лимонным ароматом, 4 с яблочным и 5 с ванильным. Какое наименьшее количество конфет он должен взять из кармана, чтобы среди них обязательно оказалась конфета с каждым из трех ароматов?

Решение. Если Вася возьмёт не больше 13 леденцов, то они вполне могут оказаться только лимонными и ванильными. Поэтому Вася должен брать не менее 14 леденцов. С другой стороны, такого количества ему точно хватит: среди 14 леденцов не более 8 лимонных и не более 5 ванильных, поэтому яблочный тоже должен быть.

Ответ. 14.

6. (10 баллов) Грузоподъемность продуктовой машины - 3 тонны. Со склада нужно увезти 100 контейнеров апельсинов по 700 кг в каждом и 100 контейнеров яблок по 900 кг в каждом. Какое минимальное число машин для этого потребуется? Обоснуйте, почему не хватает меньшего количества.

Решение. На 33 машины загрузим 99 апельсиновых контейнеров (по 700 кг, итого 2100 кг на каждую машину) и 33 яблочных (оставшиеся 900 кг), тем самым мы загрузим каждую из этих машин полностью. Осталось всего 68 контейнеров (1 апельсиновый и 67 яблочных), но теперь в каждую машину можно вместить не более трех штук, то есть нужны еще 23 машины. Итого $23+33=56$.

Ответ. 56.

7. (10 баллов) Сумма пяти последовательных натуральных чисел равна числу, записанному тремя одинаковыми цифрами. Чему равно наибольшее из пяти слагаемых?

Решение. Пусть x – наибольшее из слагаемых, тогда остальные равны $x-1$, $x-2$, $x-3$ и $x-4$. Сумма всех пяти чисел равна $5x-10$. Это число делится на 5, поэтому единственное возможное значение равно 555. Отсюда $5x=565$, $x=113$.

Ответ. 113.

8. (12 баллов) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что $AD = BD = CD$, угол CBD равен углу BAC и угол ADB равен углу ACD . Найдите углы этого четырехугольника.

Решение. Обозначим буквой α величину углов CBD и BAC , а буквой β - величину углов ADB и ACD . Так как треугольник ACD равнобедренный, то угол CAD тоже равен β . Уравнение для суммы углов этого треугольника даёт $\beta+\beta+\beta+BDC=180$. Уравнение для суммы углов равнобедренного треугольника BCD даёт $\alpha+\alpha+BDC=180$. Отсюда $3\beta=2\alpha$. И, наконец, для ещё одного равнобедренного треугольника ADB сумма углов равна $2(\alpha+\beta)+\beta$, откуда находим $3\beta+2\alpha=180$, откуда $3\beta=2\alpha=90$, поэтому $\alpha=45^\circ$ и $\beta=30^\circ$. Теперь углы четырёхугольника $ABCD$ вычисляются простой арифметикой.

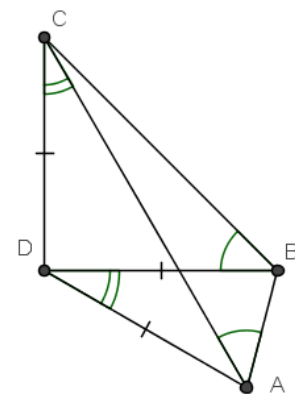


Рис.1

Ответ. $45^\circ, 75^\circ, 120^\circ, 120^\circ$.

9. (15 баллов) Число n^2 обладает следующим свойством: если зачеркнуть в нём последнюю цифру, то получится число $n+50$. Найдите все возможные значения натурального числа n .

Решение. Пусть s – последняя цифра квадрата. Тогда до зачёркивания цифры число было равно $10(n+50)+s$. Таким образом, нам нужно решить уравнение $n^2=10n+500+s$, Это уравнение перепишем в виде $(n-5)^2=525+s$. Так как s – цифра, то $(n-5)^2$ – число между 525 и 534. Единственным квадратом в этом промежутке является 529. Таким образом, $n-5=23$, $n=28$.

Ответ. 28.

- 10.(15 баллов) Каждый из 450 сенаторов при ответе на вопрос лжёт, если знает правильный ответ, и говорит что угодно, если не знает. После выборов, в которых участвовали Клинтон и Трамп, каждому сенатору задали два вопроса: "За кого Вы голосовали?" и "Кто выиграл выборы?". Ровно 200 сенаторов ответили: "Я голосовал за Клинтон" и "Выиграла Клинтон". Остальные 250 ответили: "Я голосовал за Трампа" и "Выиграл Трамп". Известно, что все сенаторы голосовали, и каждый помнит, за кого отдал голос. Какое наибольшее количество сенаторов могли знать реальные итоги выборов?

Решение. Если выиграл Трамп, то все знающие об этом входят в те 200, которые сказали, что выиграла Клинтон, поэтому знающих итоги не больше 200. Аналогично, если выиграла Клинтон, то все знающие об этом входят в 250 сказавших о победе Трампа, поэтому знающих не больше 250. Таким образом, количество знающих итоги в любом из двух случаев не больше, чем 250.

Ответ. 250.