MathCat красный

1. (5) 45 конфет стоят столько же рублей, сколько их можно купить на 20 рублей. Сколько конфет можно купить на 36 рублей?

Ответ: 54

Решение: Пусть x – стоимость 1 конфеты. По условию $45x = 20/x$, откуда $x^2 = 20/45 = 4/9$, $x=2/3$. На 36 рублей можно купить $36/x$ конфет, и это равно 36*3/2 = 54.

2. (5) В тесте к каждому вопросу указано 5 вариантов ответа. Отличник отвечает на все вопросы правильно. Когда двоечнику удается списать у отличника, он отвечает правильно, а в противном случае – наугад (то есть среди несписанных вопросов он правильно отвечает на 1/5 часть). За год двоечник правильно ответил на половину вопросов. Какую долю ответов ему удалось списать?

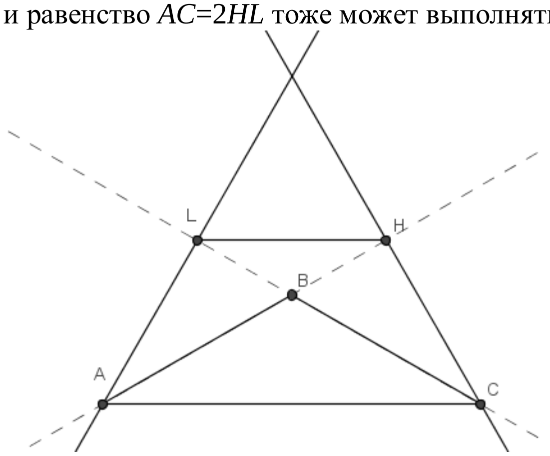
Ответ: 3/8

Решение. Пусть d – доля списанных ответов. Тогда $1–d$ вопросов не были списаны, и двоечник правильно ответил на их пятую часть. Решив уравнение $d+(1–d)/5 = ½$, получим $d=3/8$.

3. (10) AH и CL – высоты равнобедренного (AB = BC) треугольника ABC, причем AC = 2HL. Какую наибольшую величину (в градусах) может иметь угол B?

Ответ: 120°.

Решение. Это задача с подвохом: так как в равнобедренном треугольнике HL параллельно AC, то на первый взгляд кажется, что HL – средняя линия, а тогда высота CH совпадает с медианой, то есть треугольник должен быть также и равнобедренным с основанием AB, а значит, правильным. Для такого случая $\angle B$=60°. Однако в тупоугольном треугольнике высоты пересекаются вне треугольника, и равенство $AC=2HL$ тоже может выполняться (см. рис).



Этот случай соответствует ситуации, когда высоты CH и AL треугольника образуют с основанием углы 60°, то есть углы при основании равны 30°. Отсюда $\angle B$ = 120°.

4. (10) В однокруговом шахматном турнире Петя набрал в 10 раз больше очков, чем Вася. При каком наименьшем количестве участников турнира такое могло быть? (Победа в партии – 1 очко, ничья – 1/2 очка, поражение – 0 очков)

Ответ: 6.

Решение. Петя и Вася не могли оба набрать 0 очков, так как они сыграли партию между собой, в которой разыгрывалось 1 очко. Следовательно, Вася набрал больше 0, и минимально возможный результат Пети – 5 очков – соответствует результату Васи «½ очка». Но Петя мог набрать 5 очков только если сыграл не менее 5 партий, а это означает, что в турнире было не менее 5 участников, не считая самого Пети. Пример турнирной таблички для турнира с шестью участниками, удовлетворяющего условиям задачи:

	Петя	2	3	4	5	Вася	Сумма
Петя		1	1	1	1	1	5
2	0		½	½	1	1	3
3	0	½		½	1	1	3

4	0	½	½		1	1	3
5	0	0	0	0		½	½
Вася	0	0	0	0	½		½

5. (10) Натуральные числа x, y, z увеличили на 1, 2 и 6 соответственно. На какую наибольшую величину могла измениться сумма 1/x + 1/y + 1/z?

Ответ: 85/42.

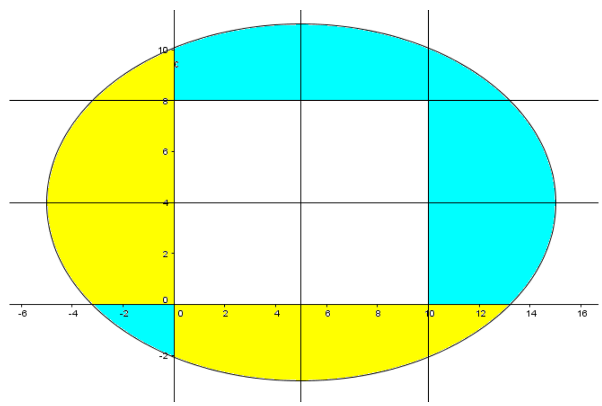
Решение. Необходимо найти наибольшее возможное значение выражения $1/x + 1/y + 1/z - 1/(x+1) - 1/(y+2) - 1/(z+6)$ (ясно, что если знаменатели увеличились, то каждая дробь уменьшилась, поэтому и сумма тоже уменьшилась). Перепишем это выражение в виде $1/(x(x+1))+2/(y(y+2))+6/((z(z+6))$. Здесь каждая дробь достигает максимума при минимально возможном знаменателе. То есть достаточно подставить $x=y=z=1$. Получается $1/2 + 2/3 + 6/7 = 85/42$.

Комментарий: верный ответ без обоснования засчитываться не должен. Верное обоснование с неточно сосчитанным ответом может быть и засчитано.

6. (10) Эллипс $(x-5)^2/100+(y-4)^2/49 = 1$ ограничивает в первой, второй, третьей и четвертой четвертях координатной плоскости фигуры площадью S_1, S_2, S_3, S_4 соответственно. Найдите $S_1-S_2+S_3-S_4$.

Ответ: 80.

Решение. Изобразим голубым цветом те области, которые складываются, а жёлтым – те, которые вычитаются. После этого проведём прямые, симметричные координатным осям относительно осей эллипса, – это сопоставит каждой жёлтой области «свою» синюю. То, что останется без сопоставления, и будет искомым значением. Осталось понять, что остался прямоугольник со сторонами 10 (вертикальная ось эллипса – прямая x=5) и 8 (горизонтальная ось эллипса – прямая y=4), площадь которого, очевидно, равна 80.



7. (10) Натуральное число разделили на сумму его цифр, результат на сумму его цифр, новый результат – на сумму его цифр. В итоге получилось число 2. Каким могло быть исходное число? (Укажите все варианты и обоснуйте полноту ответа)

Ответ: 2916.

Решение. Последнее деление может быть только 18:9=2 (например, это можно проверить перебором всех четных двузначных чисел, не превосходящих 36, потому что сумма цифр двузначного числа не больше 18). Так как 18 делится на 9, то и все предыдущие числа делились на 9, следовательно, суммы их цифр могли быть 9, 18, 27 и т.д. Для трехзначных чисел максимально возможная сумма цифр равна 27, поэтому для второго деления достаточно проверить варианты $18\cdot 9$ и $18\cdot 18$. Оба они (162 и 324) имеют сумму цифр 9, поэтому годится только первое. И, наконец, отыщем такое неизвестное число, которое после деления на сумму своих цифр даёт 162. Ясно, что это число должно быть четырехзначным ($999/9 < 162$, $10000/45 > 162$). Следовательно, достаточно проверить только варианты $162\cdot 9=1458$, $162\cdot 18=2916$, $162\cdot 27=4374$ и $162\cdot 36=5832$. У всех полученных чисел сумма цифр равна 18, поэтому годится только второе из них.

8. (12) Чему равен наибольший простой делитель числа $191\times 197\times 197+32$?

Ответ: 199.
Решение. Применим нестандартный приём – обозначим число 195 буквой x (!). В задаче спрашивается про число $(x–4)(x+2)^2+32$. Раскроем скобки: $(x–4)(x^2+4x+4)+32 = (x^3–12x–16)+32= x^3–12x+16$. Заметим, что этот многочлен раскладывается на множители полностью аналогично тому, как раскладывалось $x^3–12x–16$, то есть равен $(x+4)(x–2)^2$. Наибольшим простым делителем числа $199\cdot193^2$ является 199.

9. (13) Три стороны и одна высота треугольника – четыре последовательных натуральных числа. Найдите наименьшее возможное значение площади этого треугольника.

Ответ: 84.
Решение. Можно доказать, что отрезки, на которые эта высота делит противоположную ей сторону, также должны быть целыми (если корни из целых чисел $\sqrt{b^2-h^2}$ и $\sqrt{c^2-h^2}$ не целые, то их сумма и разность не могут быть целым числом). Значит, высота должна быть катетом в двух прямоугольных треугольниках с целыми сторонами. Такие треугольники называются пифагоровыми, и они хорошо известны. Наименьшие из них имеют катеты (3,4), (6,8), (5,12) и (9,12). Таким образом, 12 –это наименьшее натуральное число, которое может оказаться высотой в нужном нам треугольнике. При этом для треугольника с высотой 12 всё считается сразу: гипотенузы двух треугольников равны 13 и 15, третья сторона равна сумме двух других катетов (14=5+9). Так как числа 12, 13, 14 и 15 действительно являются последовательными, то мы построили пример нужного треугольника с минимально возможной высотой. Площадь такого треугольника равна 14*12/2 = 84, а для любой большей высоты все последовательные числа будут больше, и, следовательно, площадь также будет больше.

10. (15) Чему равна сумма всевозможных произведений четного количества дробей 1/2, 1/3, …, 1/100? Ответ дайте в виде десятичной дроби.

Ответ: 24,255
Решение. Сначала покажем, как найти сумму всевозможных произведений этих дробей (не только чётного количества, но и нечётного). Для этого рассмотрим произведение $1+\frac{1}{2}\ \ 1+\frac{1}{3}\ \ 1+\frac{1}{4}\ \ldots\ 1+\frac{1}{100}$. С одной стороны, оно равно 3/2 · 4/3 · ... · 101/100 = 101/2. С другой – если в нём раскрыть все скобки, то получим сумму всех возможных произведений любого числа дробей и еще одно слагаемое, равное 1. Теперь заметим, что если раскрыть скобки в произведении $1-\frac{1}{2}\ \ 1-\frac{1}{3}\ \ 1-\frac{1}{4}\ \ldots\ 1-\frac{1}{100}$, то получатся все те же произведения дробей, но часть из них будет со знаком минус. Точнее, с минусом будут все произведения нечётного числа дробей. Значит, если сложить это выражение с предыдущим, то произведения нечётного числа дробей сократятся, а чётного – удвоятся. Таким образом, если (неизвестная нам пока) сумма равна S, то $2+2S$ = (1+1/2)...(1+1/100) + (1–1/2)...(1–1/100) = 101/2 + ½ · 2/3 ·3/4 · ... · 99/100 = 101/2 + 1/100 = 5051/100. Отсюда S = 4851/200 = 24,255.