Ответы и решения задач «красного» уровня сложности MathCat

Задача 1. (6 баллов) На съезде либералов и консерваторов журналист задал каждому вопрос: "Сколько человек от каждой партии, не считая вас, участвует в съезде?". Каждый назвал сначала число либералов, а потом число консерваторов, при этом одно число он назвал правильно, а другое либо увеличил, либо уменьшил на 2. Среди ответов были получены такие: (21, 15), (18, 18), (17, 15). Сколько представителей от каждой партии было на съезде?

Ответ: (19;16)

Решение: Заметим, что люди из одной партии про каждую партию будут давать ответы одной четности, а из разных – разной. Тогда первый и третий из одной партии, а второй из другой. Рассмотрим ответы первого и третьего про число либералов, их ответы отличаются на 4, значит не может быть такого, чтобы среди них был правильный, и правильный обязательно 19. Если они сами либералы, то либералов всего 20, а консерваторов – 15. Но тогда третий не мог утверждать, что консерваторов 18. Значит они консерваторы, тогда либералов 19, а консерваторов 16.

Задача 2. (6 баллов) Ученики и ученицы музыкальной школы по очереди выступают на сцене, а затем возвращаются в зал в качестве зрителей. Во время Жениного выступления девочки составляли 5/16, а во время Сашиного – 7/24 сидящих в зале учеников. Сколько учеников пришло на концерт?

Ответ: 49.

Решение: Если бы Саша и Женя были одного пола, то доля девочек во время выступления была бы одинаковой. Так как $\frac{5}{16} > \frac{7}{24}$, то Женя – мальчик, а Саша – девочка. Если девочек было a, а мальчиков b, то $\frac{5}{16} = \frac{a}{a+b-1}$, а $\frac{7}{24} = \frac{a-1}{a+b-1}$, тогда $\frac{1}{a+b-1} = \frac{a}{a+b-1} - \frac{a-1}{a+b-1} = \frac{5}{16} - \frac{7}{24} = \frac{1}{48}$, откуда общее количество ребят $a + b = 49$.

Задача 3. (7 баллов) Диагональ выпуклого 41-угольника называют хорошей, если она разбивает многоугольник на два многоугольника равных периметров. Найдите наибольшее возможное число хороших диагоналей.

Ответ: 20.

Решение: Из каждой вершины не может выходить более одной хорошей диагонали. Так как вершин всего 41, а каждая диагональ выходит из двух вершин, то хороших диагоналей не более 20. Пример на 20 получается, если взять многоугольник, одна из сторон которого равна 2, а все остальные по 1.

Задача 4. (9 баллов) Витя и Оля едят прямоугольную шоколадку. Начинает Витя, своим ходом он съедает все крайние и угловые дольки у шоколадки. Потом так делает Оля, потом Витя и так пока шоколадка не закончится. Оказалось, что Витя съел на 15 долек больше. Сколько могло быть долек в шоколадке?

Ответ: 3x11=33; 11x5=55, 7x7=49

Решение: Заметим, что каждый ход Витя съедает на 8 долек больше, чем Оля на следующий за ним ход, если только ни один из этих ходов не последний. Следовательно, Оля могла сделать только один или два хода, иначе было бы хотя бы две пары ходов Витя – Оля, где каждый ход не последний. Тогда Витя бы съел хотя бы на 16 долек больше. При этом, если Оля сделала два хода, то ее ход должен быть последним.

Если Витя и Оля сделали по одному ходу, то Оля съела своим ходом полосочку либо 2xN либо 1xN. В первом случае Витя бы забрал на 8 долек больше своим первым ходом при любом N, значит, Оля брала полосочку толщины 1. Тогда, если Оля забрала k долек, то Витя забрал 2k+6 долек, то есть Оля съела полосочку 1x9, а изначальная шоколадка была 3x11.

Если Витя сделал два хода, а Оля один, то Витя съел на 8 долек больше, чем Оля первым ходом, и значит, последним ходом он съел 7 долек, то есть полосочку 1x7. Так как каждый ход кроме последнего отнимает от каждой стороны шоколадки по 2, то изначально шоколадка была 5x11.

Если Витя сделал два хода, и Оля сделала два хода, то за первую пару ходов Витя забрал на 8 долек больше, а за вторую на больше, где – количество долек, которые забрала Оля последним ходом. Тогда суммарно за две пары ходов Витя должен был забрать на долек больше, то есть , откуда , значит Оля последним ходом съела дольку 1x1, а изначальная шоколадка была 7x7.

Также у задачи возможно прочтение, в котором Оля не сделала ни одного хода, а Витя съел шоколадку целиком первым ходом. Тогда к ответам добавляется тривиальный – шоколадка была 1x15.

Задача 5. (9 баллов) На ребрах куба написали числа. Потом в каждой вершине написали сумму всех чисел на исходящих из нее ребрах, а числа на ребрах стерли. Хулиган Петя стер число в одной вершине, оставшиеся числа в вершинах указаны на картинке. Какое число он мог стереть? (См. рис. 1)

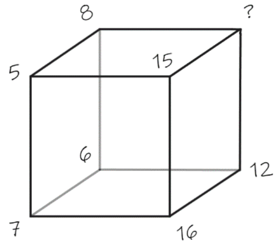
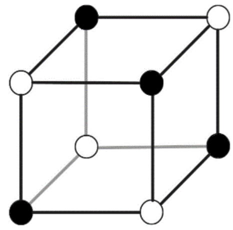


Рисунок 1

Ответ: 15.

Решение: Вершины куба можно раскрасить шахматной раскраской так, что каждое ребро будет соединять вершины разных цветов (как показано на картинке). Так как каждое ребро входит в вершины разных цветов, то один раз оно считается в черных вершинах, и один раз в белых. Тогда сумма в черных и в белых вершинах одинакова, откуда несложно вычислить стертое число.



Задача 6. (11 баллов) Дан выпуклый четырехугольник *ABCD*, *AB* = *AD*, ∠*A* = 70°, ∠*C* = 145°. На биссектрисе угла *BCD* отмечена точка *E*, отличная от точки *C*, так что *AC* = *AE*. Найдите величину угла *DAE*.

Ответ: 145

Решение: Рассмотрим окружность ω с центром в точке *A,* и радиусом *AB.* Так как *AB* равно *AD*, точки *B* и *D* лежат на ω. Меньшая дуга *BD* окружности ω равна центральному углу ∠*A* = 70°. Так как из точки *C* видно отрезок *BD* под углом $145° = \frac{360°-70°}{2}$, то точка *C* лежит на меньшей дуге *BD*. Биссектриса угла *C* пересекает ω в точке *E*, так как *AB*=*AC*=*AE*. Тогда *E* – середина большей дуги *BD* окружности, так как вписанные углы $\angle ECB$ и $\angle ECD$ равны. Тогда угол $\angle DAE = \frac{290°}{2} = 145°$.

Задача 7. (11 баллов) Найдите $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$, если $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=-3; \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0.$

Ответ: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=9.$

Решение: Сделаем замену $\frac{x}{a}=k;\ \frac{y}{b}=l; \frac{z}{c}=m$, тогда наша система примет вид $\begin{cases} k+l+m=-3 \\ \frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=0 \end{cases}$; $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{lm+km+kl}{klm}=0$ откуда $lm+km+kl=0$. Тогда $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=k^2+l^2+m^2=(k+l+m)^2-2(lm+km+kl)=(-3)^2-0=9$

Задача 8. (13 баллов) Муравей сидит в вершине X тетраэдра. За один ход он может переползти по любому ребру в соседнюю вершину. Сколько у него способов попасть в вершину Y ровно за 8 ходов? Можно приходить в требуемую вершину и раньше, но ровно через 8 ходов нужно оказаться в Y. (См. рис. 2)

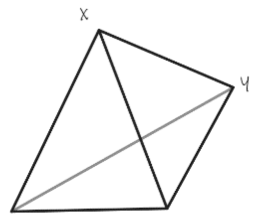


Рисунок 2

Ответ: 1640

Решение: Решим задачу в общем случае для n ходов. Пусть муравей сделает какие-нибудь $n-1$ ход, тогда если он находится еще не в вершине Y, то он ровно одним способом может добраться до вершины Y, если же он уже оказался в вершине Y, то через ход он там никак не сможет быть. Тогда если F_n – количество способов добраться из X в Y ровно за n ходов, то $F_n = 3^{n-1} - F_{n-1}$, откуда $F_n = 3^{n-1} - 3^{n-2} + 3^{n-3} - 3^{n-4} + \cdots + (-1)^{n-1}$. По формуле суммы геометрической прогрессии $\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-3)^k\right| = \frac{(3^n+(-1)^{n-1})}{4}$. Подставляя $n=8$ получим $\frac{(3^8-1)}{4} = 1640.$

Задача 9. (14 баллов) У Вани есть три красных кубика, на гранях которых написаны числа 6, 8, 10, 12, 14, 16, и три зеленых кубика с числами 3, 4, 5, 6, 7, 8, а у Любы есть три кубика с числами 11, 12, 13, 14, 15, 16. Ваня сначала кидает три красных кубика, и выбирает из них максимальный результат, а потом три зеленых и выбирает из них минимальный. А Люба просто кидает три своих кубика и выбирает максимальный результат. Что в среднем больше и насколько, сумма за два Ваниных броска или за один Любин?

Ответ: Ванина на 3.

Решение 1*:* Обозначим $Emax$ среднее наибольшее значение (математическое ожидание наибольшего значения) при броске трех кубиков с числами 3, 4, 5, 6, 7, 8. Аналогично, $Emin$ – среднее наименьшее значение (математическое ожидание наименьшего значения) при броске трех кубиков с цифрами от 3 до 8. Тогда среднее значение суммы Ваниных бросков это $2Emax + Emin$, а Любиного $Emax + 8$. Заметим, что $Emax + Emin = 11$, действительно, каждому броску с числами $(a; b; c)$ можно однозначно

сопоставить бросок с числами $(11 - a; 11 - b; 11 - c)$, что соответствует тому, что все кубики выпали противоположной стороной, то есть максимум первого броска вместе с минимумом второго будет давать 11. Тогда матожидание Вани это просто $Emax + 11$, а у Любы $Emax + 8$. То есть средний бросок у Вани больше на 3.

Решение 2: Будем называть бросок трех кубиков из которых мы выбираем максимальный результат броском с преимуществом, а бросок из которых мы выбираем минимальный результат – броском с недостатком.
Всего возможных исходов броска трех кубиков 6^3, все они равновероятны. Для каждого из бросков трех кубиков нарисуем куб 6х6х6, и будем откладывать по первой координате значение, выпавшее на первом кубике, по второй на втором и по третьей на третьем в порядке возрастания. Тогда каждому броску соответствует некоторая клетка. Внутрь клетки запишем результат нашего броска. Среднее значение (математическое ожидание) каждого броска – это сумма всех чисел в кубе, деленное на их количество. Таким образом, наша задача сводится к тому, чтобы сравнить сумму в двух Ваниных кубах с суммой в Любином.
Рассмотрим как устроен бросок с преимуществом кубиков на которых написаны числа $a_1 < a_2 < \dots < a_6$. В клетке с координатами (1;1;1) написано число a_1, далее идет “слой” (то есть множество клеток, максимум координат которых равен 2, образующее куб 2х2х2 без кубика 1х1х1) в которых записано число a_2, далее “слой” a_3 и так далее. Аналогично, куб вариантов для броска с недостатком устроен тоже по “слоям”, только в обратном порядке, первый слой с числом a_1 будет представлять из себя куб 6х6х6 с вырезанным кубом 5х5х5, а “слой” a_6 будет состоять из одного кубика 1х1х1 с координатам (6;6;6).
Чтобы узнать сумму бросков в Ваниных кубах, построим третий куб, который получается наложением первых двух так, чтобы слой с самым большим значением в первом кубе совпал со слоем с самым маленьким значением во втором, и наоборот. Тогда так в первом кубе слои от самого маленького к самому большому образовывали возрастающую арифметическую прогрессию с разностью 2, а на втором – убывающую с разностью 1, мы получим куб, также устроенный по слоям, которые образуют возрастающую арифметическую прогрессию с разностью 1. При этом в слое 1х1х1, будет написано число 6+8=14, во втором слое 15 и так далее. Если же посмотреть на куб бросков Любы, то в минимальном слое будет записано число 11, и дальше слои также образуют арифметическую прогрессию. Тогда в каждой клетке суммарного Ваниного куба вариантов написано число на 3 больше, чем в соответствующей клетке Любиного. А значит и средний бросок у него больше на 3.

Задача 10. (14 баллов) Из четырех различных ненулевых цифр составили все возможные четырехзначные числа. Сумма некоторых семи из них равна 10893. Найдите сумму остальных чисел.

Ответ: 69099

Лемма: Сумма всех возможных n-значных чисел, составленных из различных ненулевых цифр $a_1, \dots a_n$ равна $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot x \cdot (n-1)!$, где x – число вида $11\dots1$ – состоящее из n единиц.

Доказательство: Будем суммировать числа поразрядно. В разряде единиц каждая цифра встретится $(n-1)!$ раз, значит, сумма разрядов единиц всех чисел равна $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(n-1)!$. Аналогичное рассуждение верно и для остальных разрядов, откуда общая сумма равна $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) \cdot (n-1)! \cdot (1 + 10 + \dots + 10^{n-1})$.

Решение: Заметим, что число 10893 дает остаток 3 при делении на 9. Так как остаток числа при делении на 9 равен остатку его суммы цифр при делении на 9, то у всех четырехзначных чисел были одинаковые остатки при делении на 9 равные 3. Тогда сумма цифр могла быть равна 12 или 21 и более.

Пусть сумма цифр была хотя бы 21. Оценим минимальную сумма таких чисел. Если среди цифр не встречается цифра 1, то каждое четырехзначное число начинается хотя бы с 2, и тогда сумма 7 из них не менее чем 14000. Среди семи выбранных чисел есть максимум 6 чисел, начинающихся с 1, и хотя

бы одно с 2 или более. В случае если менее 6 чисел начинаются с 1, сумма чисел будет больше. Сумма 6 чисел, начинающихся с 1 и получаемых всеми перестановками трех оставшихся цифр, согласно лемме, равна $6000 + (S - 1) \cdot 111 \cdot 2$, где S – сумма цифр. Если $S \geq 21$, то сумма 6 таких чисел не менее 10440, а вместе с числом, начинающимся с 2 или более, будет больше 12000. Значит сумма цифр могла быть равна только 12, тогда по лемме, сумма всех четырехзначных чисел будет $6 \cdot 1111 \cdot 12 = 79992$. Откуда ответ: $79992 - 10893 = 69099$.