Ответы и решения задач «зеленого» уровня сложности MathCat

Задача 1. (5 баллов) Многочлен $Ax^2 + Bx + C$ имеет корни 1 и −5 Какие корни имеет многочлен $-Ax^2 + Bx - C$?

Ответ: −1 и 5.

Решение 1: Корни квадратного трёхчлена $Ax^2 + Bx + C$ можно найти по формуле $\frac{-B \pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$. Корни трёхчлена $-Ax^2 + Bx - C$ по формуле $\frac{-B \pm\sqrt{B^2-4AC}}{-2A}$, откуда видно, что корни отличаются только знаками.

Решение 2: Заметим, что многочлен $-Ax^2 + Bx - C$ имеет те же корни, что и многочлен $Ax^2 - Bx + C$. Но этот многочлен имеет корни, симметричные корням исходного многочлена $Ax^2 + Bx + C$ относительно начала координат. Например, потому, что если у многочлена $Ax^2 + Bx + C$ есть корень t, то есть $At^2 + Bt + C = 0$, то $A(-t)^2 - B(-t) + C = 0$ тоже.

Задача 2. (5 баллов) Буратино зарыл на Поле Чудес золотую монету. Из нее выросло дерево, а на нем – две монеты: серебряная и золотая. Серебряную монету Буратино спрятал в мешок, а золотую зарыл, и опять выросло дерево. Каждый раз на дереве вырастали две монеты: либо две золотые, либо золотая и серебряная, либо две серебряные. Серебряные монеты Буратино складывал в мешок, а золотые закапывал. Когда закапывать стало нечего, в мешке у Буратино было 2023 серебряные монеты. Сколько монет закопал Буратино?

Ответ: 2022

Решение: Заметим, что в результате одного «закапывания» количество монет увеличивается на 1. Поскольку сначала у него была одна монета, а стало 2023, то он закопал 2022 монеты.

Задача 3. (7 баллов) На доске написано несколько натуральных чисел, причём все цифры в их записи имеют одну и ту же чётность. Сумма всех чисел равна 2509. Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске?

Ответ: 3

Решение: В данной сумме присутствуют цифры разной четности. Поэтому это не может быть одно число. Заметим также, что сумма чисел нечётна. Это значит, что было просуммировано нечётное количество нечётных чисел. И как было доказано выше, больше одного. Следующий вариант − три числа. Для трёх чисел есть пример: 911, 9, 1591.

Задача 4. (7 баллов) Столяр дядя Федя сложил рядом три одинаковые доски и тремя распилами, как показано на рисунке (См. рис. 1), получил 9 деревянных кусочков. Известно, что длина доски составляет 1 метр. Сколько кусочков он получит, если возьмёт 9 таких же досок и сделает 9 подобных распилов?

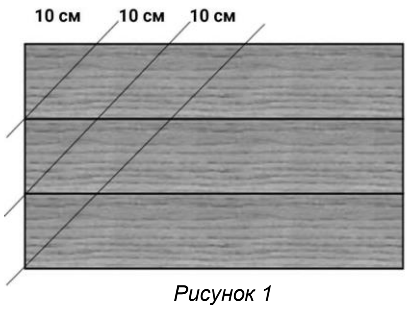


Рисунок 1

Ответ: 54

Решение: Заметим, что максимальное количество кусочков получается на верхней доске, а каждая следующая доска при разрезании даёт на 1 кусочек меньше. Так как всего распилов 9, то на верхней доске 10 кусочков, на следующей − 9 и так далее до самой нижней, на которой кусочков на 8 меньше, чем на самой верхней, то есть 2. Отсюда общее количество получившихся кусочков:

10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 54.

Задача 5. (10 баллов) Вершину треугольника соединили отрезками с 100 различными точками, взятыми на противолежащей стороне. Сколько новых треугольников образовалось в итоге?

Ответ: 5150.

Решение: Заметим, что всего на противолежащей стороне треугольника будет отмечено 102 точки, включая 2 вершины треугольника. Каждый треугольник задается какими-то двумя точками из 102 точек на противолежащей стороне, то есть надо посчитать количество способов выбрать из 102 точек ровно 2. Это число равно $102 \cdot 101 : 2 = 5151$, так как на первое место можно выбрать одну из 102 точек. Для каждого такого выбора приходится ровно 101 способ выбрать вторую точку — все кроме первой. Но каждый вариант в таком случае посчитается 2 раза, потому что не имеет разницы, выбрать ли сначала точку A, а потом точку B или наоборот, поэтому надо полученное число поделить на 2. Осталось вычесть один исходный треугольник, который уже был, поэтому новых треугольников получится 5150.

Задача 6. (12 баллов) Кощей Бессмертный решил собрать сундук изумрудов и в первый день положил в пустой сундук 1 изумруд. На следующий день положил туда 2 изумруда и так далее – каждый следующий день он клал в сундук на 1 изумруд больше, чем в предыдущий. Однако во вторую ночь Баба Яга стащила из сундука 1 изумруд и каждую следующую ночь тащила на 1 изумруд больше. Как только в сундуке наберётся 2023 изумруда, Кощей его запечатает и спрячет, и баба Яга не сможет красть. На какой день это произойдёт?

Ответ: 1012

Решение: Рассмотрим, как изменяется количество изумрудов в сундуке по дням.

2 день − 3 изумруда (положил 2), 2 ночь − 2 изумруда (украла 1)

3 день − 5 изумрудов (положил 3), 3 ночь − 3 изумруда (украла 2)

4 день − 7 изумрудов (положил 4), 4 ночь − 4 изумруда (украла 3)

…

N день − (2N − 1) изумруд (положил N), N-я ночь − N изумрудов (украла N−1)

Можно заметить, что максимальное количество изумрудов в сундуке достигается днём. Нам нужно, чтобы 2N − 1 = 2023, откуда N=1012. То есть на 1012 день в сундуке впервые окажется 2023 изумруда и в этот день Кащей сундук запечатает и спрячет.

Задача 7. (12 баллов) В стеклянной коробке размером 3х3х3 ячейки в некоторых ячейках лежат конфеты (в каждой ячейке не более одной). Дима, Сережа и Лена смотрят на эту коробку с трех сторон: Дима – спереди, Сережа – сверху, а Лена – сбоку. Какое максимальное количество конфет может лежать в коробке, если все они видят по 4 конфеты (если какие-то конфеты лежат друг за другом, то наблюдатели видят только первую конфету)?

Ответ: 8

Решение: Предположим, что конфет 9 или больше. Это значит, что за какой-то конфетой (конфетами) лежит еще две конфеты, то есть имеется ряд (вертикальный или горизонтальный), в котором три конфеты. Это означает, что с двух других ракурсов двое других наблюдателей видят все эти три конфеты. То есть оставшиеся 6 или более конфет должны быть так расположены, чтобы добавить к уже видимым трём конфетам ещё только одну. Однако, поскольку конфет не менее 6, то за какой-то из этих трёх конфет расположены две конфеты, которые видимы хотя бы для одного из наблюдателей одновременно с уже имеющимися тремя. Таким образом, получается, что для какого-то наблюдателя будут видны хотя бы 5 конфет, что противоречит условию. Пример на 8 конфет есть: в каждом углу лежит по конфете.

Задача 8. (12 баллов) На рисунке (См. рис. 2) изображены два квадрата и два одинаковых равнобедренных треугольника. Известно, что площадь квадрата равна 48. Найдите площадь серого треугольника.

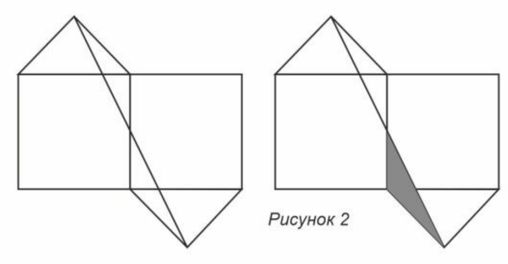
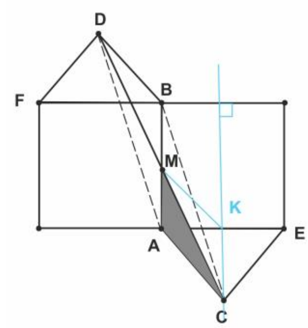


Рисунок 2

Ответ: 6

Решение: Заметим, что треугольники ABD и BAC равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, AD=BC и ACBD − параллелограмм и его диагонали делятся точкой пересечения пополам. То есть M − середина AB. Поскольку треугольник ACE − равнобедренный, то линия, проведенная через C параллельно стороне квадрата AB, проходит через середину стороны AE − точку K. Так как у треугольников AMK и AMC одно и то же основание и равны высоты, опущенные на это основание, то и площади этих треугольников равны. А площадь треугольника AMK − восьмая часть площади исходного квадрата.



Задача 9. (15 баллов) Девяти мудрецам надели разноцветные колпаки: синего, белого, красного и зеленого цвета. Причем известно, что колпаки всех цветов присутствуют. Мудрецы сидят в кругу, они видят колпаки всех людей, но не видят цвет своего колпака. Сначала всех мудрецов одновременно спросили: «Ваш колпак зеленый?» Никто не ответил ни «да», ни «нет». Через минуту этот вопрос снова повторили всем мудрецам. Несколько мудрецов сказали «да». Сколько мудрецов ответило теперь «да»?

Ответ: 2

Решение: Поскольку в первый раз никто не сказал ни «да», ни «нет», это значит, что каждый видел колпаки всех цветов. Так как если бы какой-то цвет был в одном экземпляре, то мудрец с этим колпаком немедленно это обнаружил бы и сказал либо «да», либо «нет». Значит, каждого цвета хотя бы два колпака. То есть два синих, два белых, два красных, два зелёных − это восемь колпаков. Рассмотрим оставшийся девятый колпак. Если он зелёный, то каждый из трёх мудрецов с зелёным колпаком видит перед собой все цвета по два раза и не может сделать вывод, какого цвета его колпак. Если же девятый колпак любого другого цвета кроме зелёного, то теперь все, у кого колпаки не этого цвета точно знают свой цвет. В том числе и обладатели зелёных колпаков. А так как по условию есть те, кто сказал «да», то это мудрецы в зелёных колпаках. И их ровно двое.

Задача 10. (15 баллов) На доске было написано «ОЛИМПИАДА МАТКЭТ УРА!». Костя и Вася решили сыграть в следующую игру: каждый в свой ход может зачеркнуть любое количество одинаковых букв. Выигрывает тот, кто зачеркнет последнюю букву. Начинает Костя. Как ему нужно играть, чтобы гарантированно выиграть? В ответе укажите первый ход − какие буквы нужно зачеркнуть.

Ответ: АА

Решение: Разобьем буквы на группы одинаковых.

ОЛПДКЭУР − 8 групп по одной букве

ИИ ММ ТТ − три группы по две буквы

АААА − одна группа из четырёх букв.

Если первым ходом зачеркнуть две буквы А, то получившиеся группы можно разбить на две симметричные части. Например, О, Л, П, Д, ИИ, ММ и К, Э, У, Р, ТТ, АА. И теперь Костя будет повторять ходы Васи, а именно: если Вася зачеркивает одиночную букву в одной части, то Костя также зачеркивает одиночную букву в другой части. Если Вася зачеркивает сколько-то букв (одну или две) из группы из двух букв, то Костя совершает аналогичное действие в другой части. Тем самым у Кости всегда есть ход и после его хода позиция симметрична, а после хода Васи − нет. Это значит, что ситуацию «нет букв» сможет после своего хода получить только Костя, а именно зачеркнуть последнюю букву.

Докажем теперь, что другие варианты не гарантируют выигрыш.

Действительно, если Костя зачеркнет что-то другое, то Вася сможет сделать симметричную позицию и воспользоваться ранее описанной стратегией.

Если зачеркнет какое-то количество букв А (но не две), то:

если А, то Вася зачеркивает еще А;

если ААА, то Вася − А или любую одиночную букву;

если АААА, то Вася ММ.

Если Костя зачеркнет не А, а пару других одинаковых букв, то Вася − АААА.

Если любую одиночную букву, то Вася − А. Тогда получится группа ААА, три группы из двух букв и семь из одной. И теперь после любого хода Кости Вася одним ходом делает четное количество как групп из двух букв, так и из одиночных букв и снова использует симметричную стратегию. Например, если Костя целиком зачеркнет ААА, то Вася заберет одну букву из какой-нибудь двухбуквенной группы, а если Костя зачеркнет одиночную букву, то Вася зачеркнет одиночную А.