Ответы и решения задач «зелёного» уровня сложности MathCat

Задача 1. (5 баллов) Даша и Маша играли в «крестики-нолики» на доске 3×3. Кто играет крестиками, а кто ноликами, сначала определили жребием, а потом менялись. Маша выиграла 4 партии, а Даша – 3. На рисунке приведены окончания партий в том порядке, как они игрались. Определите, сколько партий выиграла Маша ноликами: (См. рис. 1)

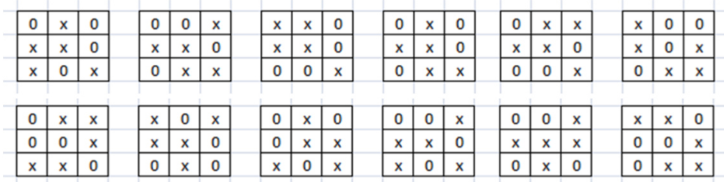


Рисунок 1

Ответ: 2

Решение: Пусть в первой партии одна девочка играла крестиками, а вторая ноликами. Тогда во второй - первая играла ноликами, а вторая крестиками. Запишем, кто как играл:

I X 0 **X** 0 X **0** X 0 X 0 **X** **0**
II 0 X 0 **X** 0 X **0** X 0 **X** 0 X

Жирным шрифтом выделено, кто выиграл в этой партии. Откуда видно, что одна выиграла 4 партии (значит, это Маша), а другая - 3 партии (значит, это Даша). Откуда легко видеть, что Маша выиграла ноликами две партии.

Задача 2. (7 баллов) Ваня и Даня сыграли в шахматы 29 партий. Кто играет белыми, первый раз определяли жребием, а далее они менялись цветом. Оказалось, что каждый выиграл одинаковое число партий. Причем каждый выигрывал только белыми и не было двух результативных партий подряд. Какое минимальное количество ничьих было?

Ответ: 14 ничьих

Решение: Поскольку результативные партии не могут идти подряд, для их максимального количества они должны идти через одну. То есть больше 15 результативных партий быть не могло. А поскольку каждый выиграл одинаковое количество, то всего результативных не более 14.
Пример на 14 легко строится:

В - В - В - В - В - В - В - - Д - Д - Д - Д - Д - Д - Д -

Задача 3. (10 баллов) На клетчатой доске две клетки выкрашены в серый цвет так, как на рисунке. Сколько существует прямоугольников со сторонами по линиям сетки, содержащих обе эти клетки? На рисунке приведен пример такого прямоугольника. (См. рис. 2)

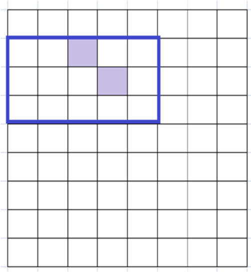


Рисунок 2

Ответ: 210 прямоугольников

Решение: Заметим, что прямоугольник определяется выбором вертикальных и горизонтальных линий, его ограничивающих. Для нижней линии 7 вариантов, для верхней - 2. Для левой 3 варианта и для правой - 5. Каждая из этих линий может быть выбрана независимо, поэтому количество прямоугольников равно произведению 7×2×3×5=210.

Задача 4. (8 баллов) Метатель ножей метает в мишень ножи и вилки с четырьмя зубцами. Всего он бросил 20 предметов, оставивших на мишени 35 дырок. Сколько у метателя ножей и сколько вилок, если никакие два предмета не попали в одно и то же место?

Ответ: 5 вилок и 15 ножей

Решение: Если бы все предметы были ножами, то на мишени осталось 20 дырок. Их же на 35 - 20 = 15 дырок больше. “Лишние” дырки добавляют вилки - по три на каждую. Значит, вилок было 15:3 = 5, а ножей 20 - 5 = 15.

Задача 5. (13 баллов) В верном арифметическом равенстве в левой части одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, а разные - различными. Получилось: (М + А-Т-Н) × (К + А + Т) = 2022.
Восстановите исходное равенство. Укажите все возможные варианты.

Ответ:(8 + 329)x(1 + 3 + 2) или (9 + 328)x(1 + 3 + 2)

Решение: Разложим на простые множители 2022 = 2x3x337. Поскольку в одной скобке сумма трёх однозначных чисел, то этот множитель либо однозначное число, либо двузначное. Но в разложении на множители числа 2022 получить двузначный множитель нельзя, поэтому К + А + Т - однозначное число. Значит, это либо 3, либо 6 (2 получить не получится, так как минимальная сумма трёх однозначных чисел равна 3 (=0+1+2) Но эсли это 3, то второй множитель 674, который получается в результате суммы трехзначного числа и однозначного. Это значит, что в любом случае А=6, но такой цифры среди КАТ нет. Значит, К+А+Т=6. Тогда во второй скобке в сумме получается 337 и А = 3. Отсюда Т=2 (так как при суммировании с однозначным числом нельзя получит в десятках цифру, отличающуюся от исходной более, чем на 1), К = 1. Таким образом получаем два варианта:
(8 + 329)x(1 + 3 + 2) или (9 + 328)x(1 + 3 + 2)

Задача 6. (12 баллов) На кошачьей выставке в ряд сидит 100500 котов. Каждый кот либо пушистый, либо голубоглазый, либо и пушистый, и голубоглазый. Известно, что если пушистый кот сидит рядом с пушистым котом, то он лжет. Если голубоглазый сидит рядом с голубоглазым, то он лжет. Во всех других случаях кот говорит правду. Каждый пушистый заявил “Рядом со мной два пушистых кота”. Каждый голубоглазый заявил “Рядом со мной два голубоглазых кота. (Если кот был и пушистым, и голубоглазым, то он сказал два утверждения). Какое максимальное количество утверждений могло быть сказано или, что то же самое - какое наибольшее количество пушистых голубоглазых котов могло сидеть на выставке?

Ответ: 33500

Решение: Заметим, что пушистые коты должны сидеть парами. В противном случае они будут высказывать истинное утверждение, хотя должны лгать, или лгать, хотя должны говорить правду. Аналогично для голубоглазых котов. В свете этого коты распределены по тройкам (один голубоглазый и не пушистый, один пушистый и не голубоглазый и один и пушистый, и голубоглазый) и четверкам (два пушистых не голубоглазых и два голубоглазых и не пушистых) с двойками (либо пара пушистых, либо пара голубоглазых) - между тройками.

Г	Г			Г	Г			…	
		П	П			П	П		

Г	Г		Г	Г				…	
	П	П		П	П				

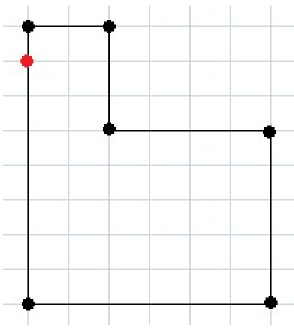
Г	Г		Г	Г			Г	…	
		П	П		П	П			

Пушистого голубоглазого (или дополнительного утверждение) нам дает только тройка. Причём между любыми двумя одновременно пушистыми и голубоглазыми должно сидеть как минимум два кота, которые таковыми не являются. Соответственно, чем больше троек, тем больше утверждений. 100500 делится на 3 (=33500), поэтому максимальное количество таких котов = 33500

P.S. Заметим, что не любое количество от 0 до 33500 можно реализовать. Например, 2 возможно, а 1 нет. Собственно любое нечетное число нереализуемо

Задача 7. (10 баллов) Улитка ровно в полдень отправилась в путешествие. В первый час она проползла 1 см по прямой, затем повернула на 90º в какую-то сторону и за второй час проползла еще 2 см по прямой, затем снова повернула на 90º и в следующий час проползла 3 см. И так далее: каждый час поворачивала на 90º и проползала на 1 см больше, чем в предыдущий час. На каком наименьшем расстоянии от начальной точки она могла оказаться в 19 часов?

Ответ: 0 см



Решение: Это задача на конструктив. Поскольку можно предъявить пример путешествия, когда улитка возвращается в исходную точку, то никакого доказательства минимальности не требуется. 0 – это минимально возможное расстояние. На рисунке сторона клетки равна 1см и семь отрезков, поскольку с 12 до 19 прошло 7 часов.

Задача 8. (11 баллов) В ряд стоят 7 коробочек, в каждой из которых есть хотя бы одна монета. Будем говорить, что монеты соседние, если они лежат в одной и той же или в соседних коробочках. Известно, что у каждой монеты либо ровно 6, либо ровно 12 соседних монет. Сколько всего монет может быть в коробочках? Укажите все возможные варианты.

Ответ: 27 монет.

Решение: Всего коробочек 7, обозначим их буквами А, Б, В, Г, Д, Е, Ж в том порядке, как они расположены в ряду.
Исходя из определения соседних монет следует, что суммарное количество монет, лежащих в А и Б равно 7 или 13. Аналогично в сумме в А, Б и В тоже 7 или 13.
Заметим, что поскольку по условию в каждой коробочке лежит хотя бы одна монета, то эти две суммы не могут быть равны.
Следовательно А+Б=7, А+Б+В=13. И В=6
Из тех же соображений
Е+Ж=7, Е+Ж+Д=13. И Д=6
Для коробочки Г сумма в В,Г и Д должна быть 7 или 13. Но В=Д=6, поэтому сумма В+Г+Д=13 и Г =1.
Сложив равенства А+Б+В=13, Е+Ж+Д=13 и Г=1, получаем А+Б+В+Г+Д+Е+Ж=27. Откуда общее количество монет, лежащих в коробочках, равно 27.

Задача 9. (15 баллов) Из костяшек домино сложили рамку, как на рисунке по правилам домино, а именно: рядом расположены клетки с одинаковым количеством точек. Какое минимальное общее количество точек может быть в сумме на всех использованных доминошках, если дубли и пустышки не использовали? (См. рис. 3)

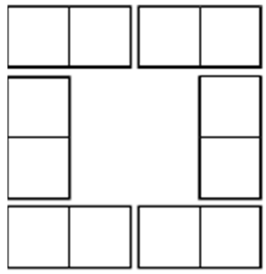
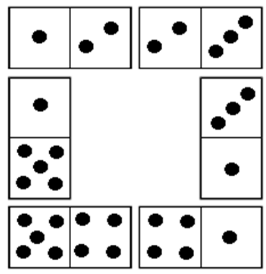


Рисунок 3

Ответ: 32

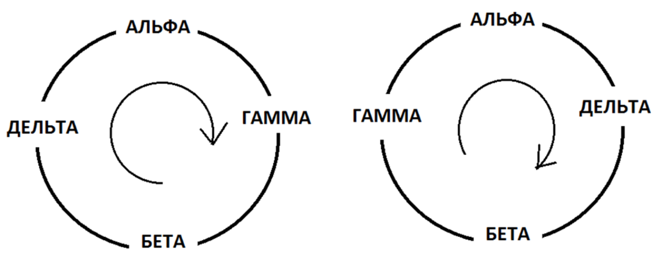
Решение: Заметим, что, поскольку доминошки выкладывались по правилам домино, то каждое число точек участвовало четное число раз. Выпишем доминошки (не дубли) с минимальной суммой точек: 1-2, 1-3, 1-4, 2-3, 2-4, 1-5, 3-4, 2-5.
Заметим, что доминошек с числами не больше 4 всего 6, но если использовать только их, то, например, 3 будет три, а их должно быть четное количество. Значит должна быть доминошка хотя бы 5-.... Но тогда пятерки как минимум две. Рассмотрим доминошки с минимальной четной суммой 3+4+5+5+6+7=30. Докажем, что доминошек с суммой точек 7 хотя бы две. Действительно, если нет доминошки 3-4, то обязательно есть доминошки 1-2, 1-3, 1-4, 2-3, (или 2-4), 1-5, 2-5, но тогда двоек три и выложить рамку не получится. Значит, выложить рамку с суммой 30 при таких условиях невозможно. А так как она должна быть четна, то сумма хотя бы 32. Для 32 можно построить пример.



Задача 10. (9 баллов) Трамвай ходит по круговому маршруту, на котором только 4 остановки — Альфа, Бета, Гамма, Дельта. Однажды путешественник ехал в трамвае с местными жителями и спросил, когда будет станция Альфа. Ему с готовностью ответили: Баба Маня: «Та остановка, на которой ты зашёл, — первая после Беты. Баба Валя: «Да нет, ты всё путаешь! Бета была после Гаммы. И зашёл он как раз на Бете» Баба Аня: «Вы обе неправы! Гамма и Дельта — соседние остановки!» Баба Галя: «Как раз на Альфе-то он и вошёл!». Как потом выяснилось, все утверждения бабушек про остановки и путешественника оказались неверными. Определите, в каком порядке идут остановки на маршруте и на какой остановке вошёл путешественник?

Ответ: Остановки по круговому маршруту: Альфа - Дельта - Бета - Гамма, путешественник вошел на Дельте.

Решение: Поскольку все утверждения бабушек про путешественника и остановки неверны, то он зашел в трамвай не на Бете и не на Альфе.
Поскольку Гамма и Дельта не соседние, то они “разбавлены” Бетой и Альфой. Значит, с точностью до отражения остановки расположены так:



Поскольку утверждение, что Бета после Гаммы неверно, то вариант слева отпадает. Но тогда путешественник зашел не на Гамме. Значит, он зашел на Дельте