Красный уровень

1. (**5 баллов**) Профессор П. диктовал студентам свой мобильный телефон из 10 цифр. Приятели Вася и Коля не успели записать некоторые цифры. У Васи получилось «8248312», а у Коли — «38128432». Восстановите номер телефона профессора, если известно, что каждая цифра повторяется в номере не более двух раз. (Надо найти все варианты)

Ответ: 3812484312.

Решение: В двух обрывках, а значит, и в исходном номере, были ровно две восьмёрки. Перед первой восьмёркой должна быть, как минимум, цифра 3, между восьмёрками – цифры 1,2 и 4, после второй восьмёрки - цифры 1,2,3,4 (так как они встречаются в соответствующих промежутках хотя бы в одном из обрывков). Мы насчитали две восьмерки и ещё минимум 8 цифр; так как всего их по условию 10, то других цифр нет. Между восьмёрками 1 должна идти перед 2 (см. Колю), а 2 перед 4 (см. Васю), после восьмерками 4 должна идти перед 3 (см. Васю), а после 3 — 1 и 2 (см. Колю).

2. (**6 баллов**) Разбойники засыпали сундук доверху золотым и серебряным песком, причём золотого песка насыпали в два раза больше по объёму, чем серебряного. Али-Баба посчитал, что если высыпать половину серебряного песка и досыпать сундук доверху золотым песком, цена сундука поднимется на 20%. На сколько процентов уменьшится стоимость сундука, если высыпать половину золотого песка и досыпать сундук доверху серебряным песком?

Решение: Пусть цена золота, заполняющего шестую часть сундука x, а цена серебра, заполняющего тот же объём — y. Тогда в первом случае цена сундука увеличила на $(x-y)$, а во втором (когда мы заменяем золото на серебро в одной трети, т.е. в двух шестых частях сундука) — уменьшилась на $2(x-y)$, т.е. на вдвое большую сумму. Если в первом случае цена поднялась на 20%, то во втором — упала на 40%.

3. (**8 баллов**) Два брата каждый день покупают себе по пирожному или мороженому, причём младший брат всегда берёт то, что старший брал неделю назад, а старший никогда не берёт то, что младший брал неделю назад. Какое наибольшее количество мороженых мог купить старший брат за ноябрь?

Решение: Заметим, что у старшего брата питание в день Х отличается от питания в день Х+14, ведь в день Х оно такое же, как у младшего в день Х+7, а в день Х+14 — наоборот. Поэтому в каждую пару дат $(1.11, 15.11)$, $(2.11, 16.11)$, $(3.11, 17.11)$, …, $(14.11, 28.11)$ старший съел ровно по одному мороженому – итого 14 штук с 1 по 28 ноября. Ещё два мороженых он мог съесть 29-го или 30-го, т.е. максимум 16 мороженых. Если старший, например, живёт в режиме «две недели мороженых, две — пирожных» и очередная серия мороженых начиналась как раз 1 ноября, а младший повторяет всё это со сдвигом на неделю, то именно так и получится, т.е. ответ 16 достижим.

4. (**8 баллов**) В треугольнике АВС угол С втрое больше угла А, а сторона АВ вдвое больше стороны ВС. Найдите угол В.

Решение: Проведя медиану M, получим равнобедренный треугольник CBM. Угол B равен $180° - \angle A - \angle C = 180° - 4\angle A$, поэтому на долю равных углов при основании CM приходится по $2\angle A$. Значит, $\angle MCA = \angle ACB - \angle BCM = 3\angle A - 2\angle A = \angle A$. Поэтому треугольник ACM равнобедренный, $CM = MA = MB$. Значит. треугольник BCM равносторонний и $\angle B = 60°$.

5. (**10 баллов**) В офисе на двух этажах работает (в сумме) 150 людей. Когда каждый мужчина в офисе написал сообщение сотруднице с другого этажа, оказалось, что 30 сотрудниц в офисе не получили сообщения, а остальные получили по одному. При этом на первом этаже получившие сообщение составляют ровно половину от общего числа работников на этаже, а на втором — 2/7 от числа работников на этаже. Сколько мужчин работает на втором этаже?

Решение: Пусть на первом этаже работает $2x$ мужчин, а на втором – y. Тогда на первом этаже y сотрудниц получили послания, а y клерков, в том числе $y-2x$ сотрудниц, не получили. Аналогично на втором этаже $2x$ сотрудниц получили послания, а остальные $5x$ клерков, в т.ч. $5x - y$ сотрудниц – не получили. Итого сотрудниц без послания имеется $y - 2x + 5x - y = 3x$, но по условию их 30, откуда $x = 10$ и на первом этаже работают $2x = 20$ мужчин. Вообще же адресатов и адресантов всего $150-30 = 120$, из них ровно половина — 60 — мужчины, значит, на втором этаже работают 40 мужчин.

6. (**10 баллов**) Известно, что $x + y + z = 0$. Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди чисел

$$sin(x), \sin(y), \sin(z), \cos(x), \cos(y), \cos(z) \text{ ?}$$

Ответ: 5.

Решение: Пример, когда положительных чисел именно столько: $x = y = \pi/6$, $z = -\pi/3$, в этом случае $\sin(z)$ отрицателен, а все остальные числа положительны. Все шесть чисел положительными быть не могут, например, потому, что $\sin(z) = -\sin(-z) = -(\sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x))$, так что если $sin(x)$, $\cos(y)$, $\sin(y)$, $\cos(x)$ положительны, то $\sin(z)$ точно отрицателен. Можно решить и без формулы синуса суммы, а изучая промежутки, на которых синус и косинус положительны, но это чуть длиннее.

7. (**12 баллов**) Петя загадал четыре натуральных числа, потом посчитал произведение первого, второго и четвёртого, произведение первого третьего и четвёртого, произведение второго, третьего и четвёртого и, наконец, сумму первого, второго и третьего. После этого он написал на доске полученные результаты по возрастанию: 24, 27, 120, 160. Восстановите по этим результатам загаданные Петей числа в правильном порядке.

Решение: Назовём исходные числа a, b, c, d. Заметим, что из трёх произведений abd, acd, bcd произведение любых двух делится на третье. С другой стороны, произведение никаких двух из чисел $24{,}120{,}160$ не делится на 27 (в его разложении на простые множители – три тройки, а у оставшихся — максимум по одной). Значит, 27 – именно сумма первых трёх чисел, причём отношение двух из них такое же, как и отношение произведений $24/160 = 3/20$. Так как эти числа меньше 27, это может быть лишь если одно из них — 3, а другое 20. Тогда третье число — это $27-20-3 = 4$, а четвертое можно найти например, как 160/(20·4)=2. Можно решать и по-другому, разбирая все 4 варианта и находя для каждого варианта пропорции первых трёх чисел.

8. (**12 баллов**) Путь Васи из точки A в точку B — двухзвенная ломаная ACB, причём, двигаясь по ней, он всё время удаляется от точки A и приближается к точке B. Известно, что любая двухзвенная ломаная большей длины между точками A и B не даст того же эффекта. Найдите угол ACB.

Ответ: $90°$.

Решение: Опустим из точки B перпендикуляр на прямую AC, его основание — точка D. Ясно, что двигаясь от точки A в противоположную от D сторону или от точки D в противоположную от A сторону, Вася удаляется от точки B. Поэтому C лежит на отрезке AD. Но если C не совпадает с D, то ломаная ADB — длиннее ACB, однако даёт тот же эффект. Поэтому $C = D$ и угол ACB — прямой.

9. (**14 баллов**) Среди 19 монет – 18 одинаковых настоящих и одна фальшивая, которая чуть легче. Есть два аппарата «двухчашечные весы», каждый из них показывает, на какой чаше вес больше, но при этом ломается, если равновесие нарушено. Нумизмат разработал алгоритм, позволяющий за три взвешивания гарантированно найти фальшивую монету, пусть и ценой поломки весов. Сколько монет он должен положить первым действием своего алгоритма?

Решение: Первым действием Нумизмат должен разложить на две чаши весов по пять монет. Если весы покажут равновесие, то останется 9 кандидатов на фальшивую монету. Их можно, стандартно, выявить за два взвешивания (разложить на три кучи по три и взвесить две из них, затем взвесить две из трёх остающихся подозрительными монет). Поскольку у нас по-прежнему два рабочих аппарата, то на два взвешивания нам их хватит.

Если же весы покажут неравенство, то у нас выявится подозрительная группа из пяти монет и останется один рабочий аппарат. Положим по одной монете из этих пяти на чаши весов и взвесим. Либо мы найдём фальшивую монету (сломав последние весы), либо весы останутся в работе и останется три кандидата на фальшивую монету. Взвесим опять две из них и однозначно определим фальшивку.

10. (**15 баллов**) В каждую клетку доски 100×100 записано натуральное число, все числа различны. Шахматный король хочет пройти по нескольким клеткам доски (стартовую точку он выбирает сам) так, чтобы в каждой следующей клетке число было больше предыдущего. Какое наибольшее количество клеток он гарантированно может посетить (независимо от расстановки чисел)?

Ответ: 4.

Решение: Заметим, что любой квадрат 2×2 шахматный король может обойти в любом порядке (т.к. любые две клетки в таком квадрате связаны ходом короля), в том числе и в порядке возрастания.

Приведём пример, когда больше четырёх клеток король никак не сможет обойти. Разобьём доску на квадратики 2×2, после чего в левые верхние углы квадратиков (назовём их клетками типа 1) расставим числа от 1 до 2500, в правые верхние (тип 2) — от 2501 до 5000, в левые нижние (тип 3) — от 5001 до 7500, а в правые нижние (тип 4) — от 7501 до 10000. Заметим, что король не может сделать ход из клетки в клетку того же типа, а значит, если он хочет, чтобы числа увеличивались, то должен перемещаться в клетку большего типа. Ясно, что это не может длиться дольше трёх ходов.